**Hans Schauer:**

# 4. Über Unendlichkeiten („allendliche“ Einschlussmengen vs. „unendbare“ Folgen)

**Inhaltsverzeichnis**

**4.1. Allendlich vs. unendbar**

**4.2. Das Vorverständnis des Unendlichen in der Alltagserfahrung**

**4.3. Zur Geschichte der Unendlichkeitsbegriffe**

**4.3.1. Vorsokratiker: Apeiron versus Kosmos**

**4.3.2. Zenons reductio ad absurdum**

**4.3.3. Aristoteles: potentiell und aktual Unendliches**

**4.3.4. Unendlichkeitstheorien nach Aristoteles**

**4.4. Der mathematische Folgenbegriff**

**4.4.1. Über Wiederholungen und Fortsetzungen**

**4.4.2. Erkenntnistheoretische Hintergründe der Mathematik**

**4.4.3. Eine intuitionistische Herleitung des mathematischen Folgenbegriffs**

**4.4.4. Unendbare Folgen**

**4.4.5. Die Unendbarkeit einer Folge wird durch Algorithmen determiniert**

**4.4.6. Unendbare Annäherungen an einen Grenzwert**

**4.4.7. Zusammenfassung**

**4.5. Zwischenüberlegung: „alle“ und „jeder“**

4.6. Der mathematische Mengenbegriff

4.6.1. Einschätzen von Mengen

4.6.2. Zählen mit Ordinalzahlen

4.6.3. Das Zählen von Zahlen

4.6.4. Vor-numerische Grundlagen der Mengenlehre

4.6.5. Meta-mathematische Analyse einiger Grundbegriffe der Mengenlehre

4.6.6. Zahlen-Mengen?

4.6.7. Die bijektive Zuordnung von verschiedenen Zahlenfolgen

4.6.8. Kritische Anmerkungen und Ertrag der eigenen Überlegungen

4.7. Hintergründe von Cantors Theorie der Gleichmächtigkeit unendbarer Folgen

4.7.1. Theologisches

4.7.2. Zur Lebensgeschichte und Persönlichkeit von G. Cantor

4.8. Was bleibt an positiven Ergebnissen?

4.9. Exkurs: Über endliche Iterationen in der Sexualität der Menschen

Ende

**Hans Schauer:**

# 4. Über Unendlichkeiten („allendliche“ Einschlussmengen vs. „unendbare“ Folgen)

## 4.1. Allendlich vs. unendbar

Im Titel meiner Abhandlung ist schon angesprochen, dass es mir darum geht, unter den verschiedenen Fassungen des Begriffs der Unendlichkeit, an denen nun schon seit mehr als zweitausend Jahren laboriert wurde, zwei einigermaßen unterscheidbare herauszugreifen, die ich zum Zweck der genaueren Unterscheidung mit eigens dazu geprägten Wortneubildungen und einprägsamen graphischen Zeichen versehen habe: „unendbar“ () und „allendlich“ ().
Die Wahl der beiden Zeichen kann ich so erklären:  bedeutet eine Iteration und deren (unendbare) Fortsetzung, und  könnte ein Abbild sein für den erlebend-handelnden Menschen im Zentrum des (allendlichen) Universums, von diesem gehalten und dieses zugleich als Ganzes aus sich selbst rekonstruierend (vgl. die Spekulation über den Menschen im All im Abschnitt 2.3.4.8. „Gott und Mensch“). Ich räume ein, dass zunächst jeder Neologismus und auch jedes neue Zeichen eine Zumutung, zumindest erst einmal gewöhnungsbedürftig ist, und deshalb nur mit strenger Indikationsstellung riskiert werden sollte. Dies wäre in unserem Fall nur dann angezeigt, wenn Wort und Zeichen mehr leisten als der bisher unterschiedslos verwendete Begriff „unendlich“ ($\infty$), und vor allem wenn die Unterscheidung zwischen „allendlich“ und „unendbar“ erlaubt, die darunter gefassten spezifischen Unendlichkeiten je für sich besser zu verstehen, sie klarer voneinander abzuheben und sie gezielter, vor allem effektiver zum Präzisieren und ggf. Lösen von Problemen zu verwenden.

Da ich die philosophischen Aspekte dieser Problematik schon im Abschnitt 2.3.4. abgehandelt habe, will ich jetzt nur andeuten, dass das Wort „**allendlich**“ eine Verallgemeinerung der uns geläufigen Adjektive „allmächtig, allwissend, allgegenwärtig, allbarmherzig (allgütig) und ewig (allzeitlich)“ ist, wobei ich davon ausgehe, dass die ihnen zugrundeliegenden Adjektive „mächtig, wissend, gegenwärtig, barmherzig, gütig, zeitlich (sterblich)“ allesamt je „endliche“ Eigenschaften bezeichnen, die sogar einzelnen mächtigen, wissenden, etc., also in jedem Falle doch „endlichen“ Menschen zugesprochen werden können. Erst durch die Vorsilbe „all-„ werden sie zu Prädikaten des jüdisch-christlich-islamischen Gottes, des Monotheos, und wegen dieser Herkunft sollte diese Vorsilbe „all-„ bei der Verallgemeinerung der zugrundeliegenden Adjektive zu ihrem Oberbegriff „allendlich“ dennoch erhalten bleiben, und ebenso auch die Endlichkeit der Ausgangsadjektive.

Was den zweiten Begriff, „**unendbar**“, betrifft, habe ich bei seiner ersten Anwendung zunächst eher negative Erfahrungen gemacht. Meiner Frau fiel dazu nur „unkaputtbar“ ein, als Bezeichnung für Dinge, die bei all ihrer Hässlichkeit auch im Dauergebrauch nicht kaputt zu kriegen sind und daher über Jahre nicht ersetzt wurden. Wer wird schon ein unkaputtbares Gerät oder Geschirr vorzeitig wegwerfen! Ernster genommen geht es bei „unendbar“ darum, dass irgendetwas, so z. B. die Zeit, im Nachdenken darüber nicht zum Abschluss gebracht werden kann: nach der letzten vorgestellten Sekunde gibt es immer noch eine darauf folgende, und auch der Raum hat diese Qualität: hinter der letzten Galaxie am äußersten Rande unseres Weltalls könnten dortige Astronauten zwar ins Leere, aber in dieser Leere doch in immer weitere Fernen düsen. Vor ihnen ist dann immer noch weiterer Raum, unendbar weit.

Der mittlere Bestandteil („-end-„) des Kunstwortes „unendbar“ soll im Sinne von „beenden“ verstanden werden, aber aus guten Gründen die Ähnlichkeit von „unendbar“ mit „unendlich“ bewahren helfen. Allerdings gibt die Nachsilbe „-bar“ nicht wie die Nachsilbe „-lich“ das Vorherrschen eines charakteristischen Attributs wieder (wie bei „menschlich“, „körperlich“, „sachlich“ oder bei deren Negationen „unmenschlich“, „unkörperlich“, „unsachlich“), sondern bringt eine Handlungsmöglichkeit zum Ausdruck, wie bei „machbar, essbar, trinkbar, verstehbar, genießbar, zerstörbar, wählbar, zählbar, begehbar, usw.“, nur eben mit der Vorsilbe „un-„ versehen, um gerade diese Handlungsmöglichkeit, das Beendenkönnen, als unmöglich zu erklären oder auszuschließen. Das unendbare Tun kann eben nicht zum Ende geführt, zum Abschluss gebracht werden, die unendbare Folge endet nie, auch unabhängig davon, ob da jemand versuchen sollte, ein solches Ende herbeizuführen. Nach dem bisher Letzten gibt es dann immer noch ein Weiteres, und so fort.

Halten wir zunächst fest: die Begriffe „unendbar“ und „allendlich“ dienen einer wichtigen Unterscheidung, die mit dem bisher üblichen Begriff „unendlich“ unklar geblieben oder verwischt worden ist. Auch das Zeichen „∞“ sollte in der Regel ganz ersetzt werden, entweder durch „„ oder durch „„ , damit schon mit der Entscheidung für das eine oder das andere Zeichen angedeutet werden kann, worum genau es im gegebenen Fall gehen wird. Ich will aber dennoch kurz der Frage nachgehen, ob sich diese beiden Aspekte sinnvoll aufeinander beziehen oder in irgendeiner Gemeinsamkeit zusammenfassen lassen. Immerhin wurzeln beide in Übertreibungen, geht es in beiden Fällen um Maximierungen, sind beide zum Thema von Philosophen und Philosophien geworden. Man könnte sie daher unter dem Plural „**Unendlichkeiten**“ und mit dem alten Zeichen „∞“ dennoch zusammenfassen, allerdings, das sei betont, nur im Plural, denn **die** Unendlichkeit gibt es wohl nicht, sollte es zumindest nicht geben.

So genau der Begriff „allendlich“ zum Ausdruck bringt, dass in ihm alles Endliche eingeschlossen ist, so musste er sich doch gefallen lassen, als Ergebnis eines fortlaufenden Maximierungsprozesses verstanden und damit in die Nähe des „unendbar“ gerückt zu werden, allerdings nur im Sinne einer unendbaren Folge, die sich in dem schließlich doch endlichen Behälter (des Mengenbegriffs) zusammenkrümmen muss, vergleichbar einer immer weiter wachsenden Schlange, die ihren Korb immer weiter ausdehnt. Da ist es schon besser, wenn sie sich schließlich doch selber in den Schwanz beißt und damit mathematisch gesehen zur Kette wird. Ich denke, dass in diesem Abschnitt das Anliegen dieser Abhandlung erst einmal in großen Zügen verdeutlicht wurde.

### 4.2. Das Vorverständnis des Unendlichen in der Alltagserfahrung

Bevor wir uns näher mit der Philosophie und dann mit der Mathematik der Unendlichkeiten auseinandersetzen, sollten wir uns mit dem Alltagsverständnis von Phänomenen befassen, die zu den Begriffen „Folge“ und „Menge“ geführt haben. Das Vorverständnis des Unendlichen in der Alltagserfahrung geht auch allem Philosophieren voraus. Dabei ist zu bedenken, dass das Wort „unendlich“ schon eine weitere Steigerung von „am größten“ ist. Unsere Sprache ist darauf eingerichtet (vgl. 2.3.1.1.), mit Hilfe des Normalfalls („groß“), des Komparativs („größer als“), des Superlativs („am größten“) und eines „Totalitivs“ („unendlich groß“) mit allen Größenordnungen von Objekten vergleichend und schließlich auch bewundernd umzugehen. Aber nicht erst Unendlichkeiten faszinieren den Menschen. Auch ohne letzthinnige Steigerung ins Unendliche ist manches schon durch seine schiere Größe ehrfurchtgebietend, wie große Macht, großes Wissen und große Güte; eine große Not und großes Leid können ein Ausmaß haben, das kein Mensch ertragen kann. Ein Schmerz kann unerträglich sein. Aber schon die bloß endliche Größe eines Menschen kann auffallen; sie imponiert jedenfalls dem deutlich Kleineren. Für das Kleinkind ist sein Papa der Größte, seine Mutter wohl die allerliebste Mama. Auch homerische Kriegshelden wurden als groß, stark und schnell (so z.B. Achill) geschildert, und in alten Zeiten gab es noch Riesen, Titanen und Giganten, von denen die Adjektive riesig und gigantisch abgeleitet sind, mit denen man den Respekt vor oder die Kritik an einem übermäßig großen Bauwerk oder technischen Vorhaben zum Ausdruck bringen kann.

Groß und massig können alleinstehende Bäume sein, die sogar als Heiligtum verehrt wurden wie die heilige Eiche, die von dem christlichen Missionar Bonifatius brutal gefällt wurde, ohne Rücksicht zu nehmen auf die Menschen, die daran glaubten.. Besondere Verehrung genießen heilige Berge wie der Berg Kailash, der im westlichen Tibet mit seinen insgesamt 6.714 m über dem Meeresspiegel eine Hochebene noch weit überragt und weithin sichtbar ist. Er gilt den Hindus als Sitz des Gottes Shiva und wird auch von den Buddhisten als Heiligtum verehrt. In Griechenland reichte dem Olymp schon seine Höhe von nur 2.917 m, um als Sitz der Götter zu gelten. Aber ringsum sind eben alle anderen Berge deutlich kleiner. Ähnliche Verhältnisse finden wir in weiteren Heiligen Bergen vor, die Michael Albus in seinem Bildband „Wohnungen der Götter“ (Kreuz-Verlag, Stuttgart, 2002) in Bild und Text eindrucksvoll vorgestellt hat: der Ol Doinyo Lengai in Tanzania, der Licancabur in Chile, die San-Francisco-Peaks in Arizona, der Fujiyama in Japan und der Gunung Agung auf Bali.

Körperliche Größe und Stärke imponiert den Menschen auch bei Tieren, selbst bei Pflanzenfressern wie den Elefanten, vor allem aber bei Raubtieren wie Tiger und Löwe, die jeweils in ihren Verbreitungsgebieten als König der Tiere geachtet werden. Größe hat eben auch einen politischen Aspekt: Bedeutende Fürsten erhielten den Beinamen „der Große“, auch wenn sie körperlich eher klein waren wie Friedrich II. von Preußen. Und auch das Königtum war noch steigerbar: Großherrscher ließen sich als „König der Könige“ titulieren, Kaiser als „Herrscher über dem Erdkreis“, Gott als der „Allerhöchste“.

Auch heute noch gibt es eine Rekordsucht der Superlative: da gilt es, als Erster den allerhöchsten Berg zu besteigen (und wenn das schon andere getan haben, dann wenigstens die 10 höchsten Berge), die größte Wüste zu durchqueren oder den massivsten Eisschild (die Antarktis), und am schnellsten die Erde zu umsegeln oder mit Land- und Luftfahrzeugen zu umrunden. Der tiefste Tiefseegraben konkurriert mit dem Ort, wo in Sibirien die kälteste Temperatur gemessen wurde.

Aber selbst die größten und mächtigsten Helden, Herrscher, Könige und Kaiser sind sterblich und vergänglich, erscheinen als gering gegenüber der Majestät und Macht der unsterblichen Götter. Zumindest einige der Götter zeichneten sich durch unermessliche Macht, ja als Weltenschöpfer sogar durch Allmacht aus, andere waren weiser als die weisesten alten Männer, sogar allwissend, wie der Sonnengott, dem zumindest am Tage nichts entgeht; Göttinnen waren viel fruchtbarer als irgendeine lebende Mutter, konnten eine ganze Erde gebären, waren schöner als die schönste aller Frauen, und es gab auf Erden kein Kind, das so zukunftverheißend war wie ein göttliches Kind, das nach langen Winternächten endlich die Sonne wieder zur Macht kommen ließ und das Licht, die Wärme, den Frühling, ja das neue Leben brachte.

Diese Steigerungen bis zur Maximalisierung hatten schon etwas von grandiosen Übertreibungen. Einige Götter standen sogar im schlechten Ruf, ziemliche Aufschneider zu sein, auf deren Wort und Versprechen man sich nicht sicher verlassen konnte. Aber schließlich errang einer unter ihnen zunächst die Vorherrschaft, galt als allerstärkster, allergrößter, allerweisester aller Götter, erkämpfte sich schließlich die Alleinherrschaft, ja er blieb sogar als einziger übrig, als Monotheos, der alle Superlative superlativistisch in sich vereinigte. Er war nicht einfach **noch** größer, stärker, weiser als die anderen Götter, sondern Er war, Er ganz allein, allmächtig, allwissend, allgütig, allgegenwärtig, ewig (allzeitlich), und insgesamt unendlich, oder wie ich zu sagen vorziehe: allendlich. Denn die verschiedensten Attribute des all-einzigen Gottes übertreiben zwar alles menschliche und somit doch nur endliche Maß in alle denkbaren Richtungen, natürlich nur zum Positiven, zum summum bonum hin, aber sie transzendieren es nicht wirklich, denn selbst die Allmacht Gottes ist ohne Zweifel eine Macht, die manche Menschen auch zu spüren bekommen haben, jedenfalls nach eigener Aussage.

Neben den Unendlichkeiten Gottes gab es weiterhin die Steigerungen und Maximalisierungen irdischer oder weltlicher Größe, angefangen mit den unendlichen Mengen der Sandkörner am Strand und in der Wüste, der Sterne am Himmelszelt, hinter diesen die unendlichen Weiten des Weltalls, vor unendlichen Zeiten entstanden oder von Gott erschaffen, und ewig fortbestehend. Selbst menschliches Leben wurde als ewiges Weiterleben nach dem Tode versprochen und daraufhin von gläubigen Menschen auch erhofft, von den Sündern wegen der ihnen drohenden ewigen Höllenstrafen sogar gefürchtet.

Außer dem unendlich Großen entdeckten Menschen immer weiter forschend schließlich auch das immer Kleinere, die Mikroben, Viren, Moleküle, Atome, Atomkerne, Quarks, und schließlich die Leptonen, die korpuskulären Leichtgewichte, die eben so heißen, weil sie noch viel kleiner und leichter sind als alles Andere.

Im folgenden Abschnitt soll aufgewiesen werden, dass die von mir vorgeschlagene Unterscheidung zwischen Allendlichkeit und Unendbarkeit schon sehr früh in der Geistesgeschichte, wenn auch in anderen Worten, verstanden und diskutiert wurde.

## 4.3. Zur Geschichte der Unendlichkeitsbegriffe

### 4.3.1. Vorsokratiker: Apeiron versus Kosmos

Bevor wir auch die Erkenntnisse der Mathematik in unsere Überlegungen einbeziehen, sollten wir den Gang der Theorienentwicklung von ihren philosophischen Anfängen her nachvollziehen. Zwei griechische Philosophen der Antike, die als Lehrer (Parmenides) und Schüler (Zenon) in Elea (im heutigen Süditalien) wissenschaftlich zusammengearbeitet hatten, haben in je unterschiedlicher Weise und anscheinend erstmals die beiden Hauptpositionen der Unendlichkeitstheorien fundiert: Parmenides (~ 525 - 445 v.Chr.) mit dem – quasi in einer Kugel – alles Sein einschließenden All, und Zenon (~ 490 – 430 v. Chr.) mit seinen in unendbarer Folge gegen Grenzwerte konvergierenden Reihen etwa im Wettlauf des Achill mit der Schildkröte. Den Begriff „Grenzwert“ kannte er allerdings noch nicht.

Ich möchte im Folgenden etwas eingehender der Vorgeschichte und komplizierten Entwicklung derjenigen philosophischen Unendlichkeits-Begriffe nachgehen, die ich mit meiner eigenen Unterscheidung zwischen „unendbar“ und „allendlich“ weitergeführt und, wie ich hoffe, auch verdeutlicht habe. Schon in der antiken Naturphilosophie, schon bei den Vorsokratikern finden wir, wenn auch teilweise mit anderen Bezeichnungen, diese Unterscheidung vor zwischen

erstens dem **Apeiron** (griechisch, „das Grenzenlose"), der Unbegrenztheit in der räumlichen und zeitlichen Erstreckung, und zwar vor allem in den Lehren, die wie bei Thales und Heraklit das Werden und Vergehen oder bei Leukipp und Demokrit die „unendliche" Zahl der kleinsten Atome und Elemente betonen,
und zweitens dem **Kosmos** (griechisch, „Anstand, Schmuck, Ordnung"), dem abgeschlossenen Ganzen, inhaltlich ausgefüllt als harmonische und wohlgegliederte Ordnung des Weltalls oder des Universums, der Welt als Ganzes. Im übertragenen Sinne ist Kosmos auch eine Bezeichnung für jedes Ganze, das eine in sich geschlossene und geordnete Einheit von darin zusammenhängenden Dingen, Erscheinungen, Abläufen u. a. bildet. Dass der Kosmos nur als ein begrenzter vollkommen sein kann, ist eine allgemein griechische Auffassung, denn die Grenze bedingt die Form, und das Unbegrenzte (Apeiron) ist formlos, nicht zu erfassen, im Extrem ein Chaos des Allzuvielen.

Beginnen wir unsere Analyse mit dem **Apeiron.** Ein Wegbereiter für die an diesen Begriff anknüpfenden dynamischen Vorstellungen über das Weltgeschehen war der vermutlich aus Phönizien stammende **Thales** von Milet. Da er die Sonnenfinsternis von 585 v. Chr. vorausgesagt hatte, ist auch die Zeit seines Wirkens ungefähr auf diese Zeit datierbar (Jaap Mansfeld: Die Vorsokratiker, S. 39). Nach Hippolytos ist überliefert, dass er sich als erster mit Naturphilosophie befasst hat. Er behauptete, Ursprung und Endziel des Alls sei das Wasser: „Denn erstens kämen alle Dinge aus Wasser zustande, indem es sich verfestigte, und würden wieder zu Wasser, indem sie sich verflüssigen ... Und alle Dinge bewegten sich und seien im Fluss ..." (Hippolytos, Haer. I 1, zitiert nach Jaap Mansfeld, Die Vorsokratiker I., S. 53). Übrigens nimmt der Bezug des Thales auf das Wasser in bemerkenswerter Weise vorweg, dass nach heutigem Wissen die baryonische Materie als aus Protonen (also Wasserstoffkernen) zusammengesetzt verstanden wird.

Die Betonung des Veränderlichen in der Welt gipfelte dann in der Auffassung des **Heraklit** aus Ephesos (550 – 480 v. Chr.), dass nichts in der Welt Bestand habe, dass vielmehr alles ständiger Veränderung unterworfen sei: „panta rhei" (alles fließt) (zitiert nach Fritz Krafft: Marburger Vorlesung, S. 31).

Dagegen versuchte ein Schüler und Nachfolger des Thales, **Anaximander** aus Milet (610 bis ca. 546 v. Chr.), die Vorstellung des Apeiron systematisch mit der des Kosmos zu verbinden. Er sagte, der Ursprung (gr. arché) oder Anfang der seienden Dinge sei das immerwährend Unbegrenzte. Denn aus diesem Unbeschränkten sei alles entstanden, die Welten und die darin erkennbare Ordnung und die Dinge, auch ihre Gegensätze. Er versteht das Apeiron demnach nicht mehr, wie seine Vorgänger, als bloß defizient, weil der Ordnung ermangelnd, sondern als ein Urprinzip, das zwar zunächst unbestimmt ist, in dem aber im unendlichen Werden alle Dinge entstehen, von ihm gelenkt werden, und in das sie wieder zurückkehren werden. Das Apeiron umfasst weiterhin Alles (das All!) und schließt es in sich ein, es ist selber etwas Erhabenes und schlechthin Göttliches, weil selber unwandelbar und immerwährend, also ewig. Diese Aussagen könnte ich zu einer Gesamtsicht verdichten: „Alles ist aus **einem** Ursprung entstanden und bleibt weiterhin in einem **Ganzen,** dem All, enthalten". Das entspricht weitgehend späteren pantheistischen Vorstellungen, in denen die Vielheit des Seienden etwa in der Einheit des Umgreifenden (K. Jaspers) eingeschlossen und aufgehoben ist.

Im Unterschied zu dieser Orientierung zum Einen hin betonen spätere Vorsokratiker wie Leukipp und Demokrit die Vielheit und deuten diese materialistisch. **Leukippos** von Milet (ca. 480 – 420) vertrat in seiner Atomlehre die Auffassung, dass die sinnlich wahrnehmbaren Dinge teilbar sind bis hin zu schließlich nicht mehr weiter teilbaren und unveränderlichen materiellen Teilchen, den Atomen (griech. atomos „unteilbar“), welche die stoffliche Grundlage alles Seienden sein müssten (eine höchst moderne Auffassung!). Er verwahrte sich zugleich gegen die Möglichkeit einer unendlichen Folge von Teilungsschritten, weil diese besagen würde, dass letztlich unendlich viele Teilchen einen endlichen Raum einnehmen könnten, was aber nicht möglich sei. Aus dem Zusammenstreben solcher Atome seien die wahrnehmbaren Dinge entstanden und gewachsen, und ihr Wieder-Auseinandertreten führe zum Schwinden und Vergehen dieser Dinge. Die Teilbarkeit der Dinge und die Vielheit ihrer Atome wird von Leukipp als real aufgefasst, und daraus folgt zwingend, dass zwischen ihnen Zwischenräume entstehen, zusammenfließend zum leeren Raum (vgl. Fritz Krafft, S. 53/54). Dieser Ansatz des Leukipp ist dann von seinem Schüler **Demokrit** von Abdera (460 – ca. 375 v. Chr.) weitergeführt worden.

Ich breche diese geistige Ahnenreihe hier erst einmal ab – sie wird später mit Zenon weitergeführt – und gehe zurück zu **Parmenides** von Elea (in Lukanien/Unteritalien), über dessen Lebenszeit die tradierten Angaben schwanken (540/515 - 470/445 v. Chr.). In seinem nach 500 v. Chr. verfassten Lehrgedicht (hier referiert nach Mansfeld, S.294 – 329) erörtert Parmenides das Seiende in seinen verschiedenen Aspekten, die im Originaltext in wechselnder Folge verstreut erwähnt werden, die ich deshalb hier in selbst gewählter Ordnung wiedergebe. Nach Parmenides kann man das Seiende als begrenzt, abgeschlossen, zusammengeschlossen, in sich zusammenhängend, allerorten gleichmäßig von sich selbst erfüllt und insgesamt vollständig verstehen. Er charakterisiert das Seiende auch als homogen und gleichmäßig sich erstreckend, ein selbes und im Selben verharrend, ein in sich Gleiches, Gleichbleibendes und in sich Ruhendes, ungeworden und unvergänglich, also ewig (= all-zeitlich). Als ein Geschlossen-Zusammenhängendes ist es ganz und unversehrt, es mangelt ihm nicht an Ganzheit, es ist ganz und gar in sich beisammen, als Ganzheit von Seiendem innen erfüllt. In diesen Formulierungen klingen schon Begrifflichkeiten späterer Mengentheorie an.

So weit kann man Parmenides ganz gut folgen, denn ein in verschiedenen Aspekten erfahrbares „Ganzes“ ist bis heute ein weiterhin akzeptiertes Thema der philosophischen Metaphysik geblieben, allerdings inzwischen eher vom Menschen her als zu Gott hin gedacht. Aber dann geht der Mathematiker mit ihm durch und er mathematisiert das wie Gott vollkommene Ganze des Alls, das doch eigentlich eine Vielfalt des Seiendem umfasst, in Richtung auf das Eine: Das Seiende ist eines, es ist einzig, aus einem Stück, einheitlich, und es ist das einzig zu erkennende Etwas. Die Überbetonung des Einen verweist schon auf spätere philosophisch-theologische Monotheismen. Aber wie ist das Eine vorstellbar? Parmenides versucht, es gestalthaft vor Augen zu führen in Analogie zur Erde. Dabei kommt zum Zuge, dass nach dem Zeugnis des Theophrast schon Parmenides, vielleicht als erster, die Erde als rund, und zwar nicht mehr als Scheibe, sondern schon als eine Kugel bezeichnet hat (Mansfeld, S. 329), die beständig ruht inmitten des sie rings umfassenden Himmels. Die kugelartige Symmetrie der parmenidischen Erde diente ihm wohl als Modell für eine noch idealere Kugelgestalt des einen Seienden, diesem kosmischen Ganzen ähnlich oder zumindest vergleichbar. Die im All eingeschlossene Vielfalt des Seienden musste von ihm dann aber bis zur Homogenität abstrahiert werden.

Für Parmenides ist das Seiende nicht veränderlich, nicht weiter zu vervollkommnen, offenbar weil es schon vollkommen ist. Und was ist (für einen Mathematiker!) vollkommener als eine ideale Kugel, die ja auch für uns Laien als geometrischer Körper höchster Symmetrie gilt. Dagegen könnte ein für weibliche Reize empfänglicher Mann stattdessen eher seine Geliebte als vollkommen schön empfinden! Parmenides sieht es anders: für ihn gleicht das einzig Seiende in seiner vollkommenen Symmetrie einer wohlgerundeten (!) Kugel. Wenngleich der

Radius einer Kugel sich von ihrem Zentrum aus in alle Richtungen erstrecken kann, so ist doch der Abstand vom Mittelpunkt zur Peripherie in allen Richtungen immer der Gleiche. Und da es für eine Kugel eine letzte äußere Grenze gibt, ist das Seiende rundum vollendet. Denn sich allseits erstreckend begegnet es einheitlich seinen Grenzen (Mansfeld, S. 323).

Die parmenidische Kugel ist nicht der sinnlich-praktischen Erfahrung zugänglich, sondern nur der theoretischen Erkenntnis. Damit ist das Kugelmodell des Seienden „zugleich die Entdeckungsurkunde des Begriffs der nichtsinnlichen mathematischen Figur, die (von Parmenides) freilich als real seiend angenommen wird. Was über diese seiende Kugel ausgesagt wird, hat (für ihn) unerschütterliche Gültigkeit, genauso wie es unerschütterlich gültig ist, über eine mathematische Kugel auszusagen ... (ich, H. Sch., setze in eigenen Worten fort: ...ihr Radius sei in alle Richtungen der gleiche und davon abhängig seien auch ihre Oberfläche und ihr Volumen eindeutig bestimmt). Solcher Mathematisierung bzw. Geometrisierung des so unterschiedlich Materiellen (bzw. des leeren Raums) werden wir im Verlauf der Philosophie- und Wissenschaftsgeschichte noch mehrfach begegnen, sehr deutlich noch bei Einstein, aber fortgesetzt bis in unsere Zeit.

### 4.3.2. Zenons *reductio ad absurdum*

**Zenon** der Ältere, von Elea (503/500/490 – 430 v.Chr.), war ein Schüler des Parmenides, der ihn als Sohn adoptiert hatte, und dem er dadurch verpflichtet war. Wir wissen, dass so etwas auch zu Loyalitätskonflikten, Ambivalenzen und Komplikationen führen kann. Zwar bestand Parmenides auf die Einheit und Einzigkeit des Seienden, von dem er annahm, dass es nichts außer ihm gibt (Mansfeld, S. 9), aber das hinderte seinen Schüler und Sohn Zenon nicht daran, das parmenideische Ganze in infinitesimale Teile zu zerlegen. Wohl in Kenntnis von Theorien des Anaxagoras (500 – 428 v. Chr.), der den Begriff des Unendlich-Kleinen zur Grundlage seiner Stofflehre gemacht hatte (Krafft, S. 53), war auch Zenon zur Vorstellung unendlich kleiner Stoffteilchen vorgedrungen, und zwar mit Hilfe seines Prinzips der fortwährenden und bis ins Unendliche fortgeführten Zweiteilung der Körper, Strecken und Zeiten (ebd.). In diesem Zusammenhang weist Mansfeld (S. 10) darauf hin, dass Zenon ein eigenes Verfahren des *regressus in infinitum* entwickelt hatte, nämlich indem die Lösung eines Problems erneut in sich das gleiche Problem enthält, und so weiter bis ins Unendliche. Dieses Verfahren bildet den Kern der beiden ersten Bewegungsparadoxien.

In Anlehnung an Mansfeld (S. 39 – 43) beginne ich deren Schilderung mit Zenons Argument der unendlichen (besser: unendbaren) Halbierung. Er geht davon aus, dass ein Sichbewegendes, ehe es an seinem Ziel ankommt, zuvor die erste und dann die jeweils noch verbleibende Hälfte der Strecke zum Ziel durchlaufen muss. Nun ja, das ist offenbar so, zumindest kann man das so sehen. Aber Zenon schließt daraus, dass das Sichbewegende daher sein Ziel gar nicht erreichen kann, und verallgemeinert dies zu der monströsen Aussage, dass **keine** Bewegung **je** ihr Ziel erreichen kann. Das begründet er so: Wenn man immer wieder zuerst jeweils die Hälfte der noch verbleibenden Strecke durchlaufen muss, um sich dem Ziel zu nähern, und solche Hälften, immer kleiner werdend, unendlich (H. Sch.: unendbar) oft aufeinander folgen, dann kann man solche Unendlichkeiten unmöglich bis zum Ziel durchlaufen haben, denn eine unendliche Zahl solcher Hälften durchzuzählen sei zugegebenermaßen (H. Sch.: welch plumpe Suggestion!) unmöglich. Zenon exemplifiziert diese abstrakte Überlegung an einem anschaulichen Beispiel, sozusagen für Blöde: Es geht „um einen Läufer, der im Stadion schon an der Wendemarke angekommen ist, also die erste Hälfte der gesamten Strecke bereits hinter sich hat und jetzt die zweite Hälfte zurückzulegen beginnt. Zenon beweist,“ (H. Sch.: er gibt vor, beweisen zu können!) „dass er nie das Ende erreichen kann. Denn genau so (!) wie er, um den ganzen Lauf vollführen zu können, zuerst die jetzt schon gelaufene erste Hälfte absolvieren musste – Zenon gibt dies zu und auch wir geben es nur allzu gern zu, gehen damit jedoch in die Falle - , so wird er auch, bevor die zweite Hälfte beendet werden kann, zuerst die erste Hälfte eben dieser (zweiten) Hälfte hinter sich bringen müssen. Auch von dieser Hälfte der Hälfte muss aber zuvor die Hälfte durchlaufen werden, und so weiter bis ins Unendliche (in einem *regressus in infinitum*). Der Läufer ... läuft, ohne ans Ziel zu kommen, weil sein Körper die Bewegung nicht zu Ende führen kann“ (H. Sch.: nein, weil unsere Rechnerei ihn daran hindert!). „Denn innerhalb endlicher Zeit muss eine unendliche Folge von Teilstrecken durchlaufen werden“ (zitiert nach Mansfeld, S. 11).

Es ist hier klar ersichtlich, dass Zenon schon in seinem ersten Bewegungsparadoxon sich selbst oder zumindest seine Hörer und Leser in einer selbst gebauten Falle gefangen hatte, nämlich in der unendbaren Vermehrung von völlig überflüssigen Halbierungsschritten und in der Verwandlung einer kontinuierlichen physischen Bewegung in einen iterativen mathematischen Zählvorgang. Wenn er stattdessen den faktischen Verlauf der Bewegung beobachtet hätte, wäre ihm nicht entgangen, dass selbst eine Schildkröte an ihrem Ziel, einem leckeren Salatblatt, irgendwann angekommen ist.

Bevor ich auf das zweite Paradoxon des Zenon zu sprechen komme, ist es vielleicht nützlich, zuvor ein offenbar leicht zulösendes Problem selber vorzutragen und mit dessen Lösungsmöglichkeiten vorauszuschicken, um dann vielleicht zu fragen: Ist es überhaupt „ein Problem“? Es geht um Folgendes: wenn jemand heutzutage feststellen wollte oder fragen würde, wer schneller laufen kann, ein 100-Meter-Läufer oder eine Schildkröte, dann würde man ihm aus eigener Kenntnis ohne lange Überlegung und ohne jede weitere Überprüfung sagen können, dass der Hundertmeterläufer ganz erheblich schneller als die Schildkröte ist, falls er nicht nach Kenntnis Zenonscher Paradoxien schon nach dem Start einen kombinierten Hirn- und Herzschlag erleidet. Wenn einer aber dennoch genauer wissen wollte, um wie viel schneller als die Schildkröte der Sprinter ist, der würde die beiden Konkurrenten zur gleichen Zeit starten lassen und dann mit der Stoppuhr exakt messen, in wieviel Sekunden bzw. Minuten der eine und die andere den 10 Meter entfernten Zielpunkt erreicht haben, oder aber, wie lang in Metern bzw. Zentimetern jeweils die Strecke ist, die sie in 10 Sekunden zurückgelegt haben.

Wenn wir dann bestätigt finden, dass ein 100-Meter-Läufer wirklich erheblich schneller als eine Schildkröte ist, würden wir vielleicht geneigt sein, der deutlich langsameren Schildkröte einen Handicap-Ausgleich anzubieten, damit sie eine echte Chance bekommt, das Ziel als Erste zu erreichen. Entweder dürfte sie schon früher starten oder aber, gleichzeitig mit dem Sprinter, von einem genügend vorverlegten Startpunkt aus so schnell sie kann losrennen. Das könnte so eingerichtet werden, dass sie auf recht kurzer Strecke das Rennen sogar gewinnen kann, nur selten auch mal der Sprinter. Wenn beide dann noch weiterlaufen, würde der Sprinter die Schildkröte ohnehin irgendwann bzw. irgendwo überholen. Aber wann genau und in welcher Entfernung vom Startpunkt aus gemessen? Das lässt sich nicht nur empirisch feststellen, etwa durch eine mitlaufende Kamera, sondern auch berechnen, nämlich aus der Kenntnis der je spezifischen Anfangs- und Durchschnittsgeschwindigkeiten der beiden Konkurrenten. Das alles ist offenbar **kein** Problem.

Dies vorweg, um Zenons in seiner zweiten Paradoxie vorgetragene Argumentation besser zu verstehen. Der behauptete nämlich, dass der „schnellfüßige“ Achill, der schnellste Läufer seiner Zeit, eine mit Handicap-Ausgleich vorauseilende Schildkröte **nie** einholen könne, und er „bewies“ das auf folgende Weise: Der verfolgende Achill muss ja immer wieder zuvor dort ankommen, von wo die verfolgte Schildkröte inzwischen schon weggerannt ist. Er kommt immer erst dann an dem Ort an, nachdem sie diesen gerade schon verlassen hatte. Wie in der ersten Paradoxie ist auch hier eine unendliche Folge von Teilstrecken in endlicher Zeit zurückzulegen, und auch hier betrifft der *regressus in infinitum* Strecken, die sich verringern, diesmal aber proportional zu der je unterschiedlichen Anfangsstrecke der so ungleichen Renner (Mansfeld. S.12). Zenons Beweis war für manche seiner Zeitgenossen vielleicht sogar mathematisch-logisch überzeugend, aber mit der Wirklichkeit hatte (und hat) dies nichts zu tun, denn es kann für jeden Betrachter kein Zweifel daran bestehen, dass Achill sehr bald die Schildkröte überholt.

In beiden Paradoxien versucht Zenon, die Unmöglichkeit der kognitiven Erfassung und sogar physischen Durchführung weiterführender Bewegungen zu erweisen (Mansfeld, S. 16). Dies ist ihm natürlich nicht gelungen, denn Zenon hat nur behauptet, mit seinen vertrackt mathematischen Analysen den Beweis dafür erbracht zu haben, aber die von ihm behaupteten Ergebnisse seiner Spekulationen treffen ganz offensichtlich faktisch nicht zu. Zenon nimmt auch fälschlich an, dass es keine absolute Einheit der Messung gebe, da diese sich bis ins Unendliche verkleinere. Richtig ist vielmehr, dass Zenon selber die aufeinander folgenden Teilstrecken und –zeiten bis ins minimal Unendliche zu verkleinern versuchte, und das hätte er besser lassen sollen, weil er sich damit selber eine gedankliche Falle gebaut hatte, aus der er sich nicht mehr herausargumentieren konnte. Im Vorgriff auf eine spätere Analyse der Cantorschen Mengenlehre halte ich dem Zenon vor (er wird es verkraften können), dass er selber den Gesamtvorgang des „Wettlaufs“ in immer kleiner werdende Abschnitte aufgeteilt und auf diese Weise das wiederholt gleichzeitige Ankommen an unterschiedlichen, weil mit verschiedenen Geschwindigkeiten erreichten Zwischenzielen hergestellt hat, um das auf diese Weise selber **Hergestellte** unter Zuhilfenahme einer unsinnigen Unendlichkeitsbehauptung dann als die **Feststellung** zu interpretieren, dass Achill die Schildkröte nie einholen und schon gar nicht überholen können.

Noch abstruser, weil nicht erst auf den zweiten Blick, sondern sogleich augenscheinlich der Wirklichkeit widersprechend, ist die dritte Paradoxie des Zenon, die mit dem **Pfeil**. Zenon will uns weismachen, dass der fliegende Pfeil „in Wirklichkeit“ stehen bleibt, weil er sich weder in dem Ort bewegt, an dem er sich gerade, im Bruchteil eines Moments, befindet, noch in dem Ort, an dem er noch nicht angelangt ist. So wird der Pfeil sein sogar nahes Ziel nie erreichen.

Die allzu durchsichtige Unsinnigkeit dieser Behauptungen (der Läufer erreiche im Stadion nie das Ziel, Achill könne die Schildkröte nicht überholen, der abgeschossene Pfeil bleibe stehen) lässt die Frage nach den Motiven solchen Argumentierens aufkommen. Ich schließe mal eigene Dummheit oder bloße Angeberei des Zenon aus, obwohl gesagt wurde, dass die Sophisten zu letzterer neigten. Vor allem nehme ich nicht an, dass Zenon selber ernsthaft an die Triftigkeit seiner Beweisführungen und an die sachliche Wahrheit ihrer Ergebnisse glauben konnte, es sei denn, er habe damit einen noch stärkeren übergeordneten Glauben, den an seinen Lehrer Parmenides, an dessen ideale Kugelwelt oder darüber hinaus an den einen, vollkommenen und selber unbewegten Gott verteidigen wollen. Wir haben es schon häufiger feststellen können: um sich den Glauben an eine unumstößliche Wahrheit zu bewahren oder in ähnlich motivierten Gottesrettungsversuchen, mit denen ich mich in meiner Website mehrfach kritisch befasst habe (siehe 2.2.10.14. Gottesrettungsversuche), hat schon so mancher kluge Mann einen geistigen Kopfstand und anschließende intellektuelle Purzelbäume riskiert!

Zenon war mit der von seinem Lehrer Parmenides entwickelten Methode der indirekten Beweisführung mittels einer „*reductio ad absurdum*“ vertraut, und so lag es nahe, diese zunächst im Sinne des Meisters und gegen dessen Kritiker einzusetzen. So könnte Zenon versucht haben, die Lehre des Parmenides von der Einheit und Unwandelbarkeit des Seins mittelbar zu stützen durch den Beweis, dass die gegenteilige Annahme der Vielheit, der Bewegung und des Raumes zu absurden Widersprüchen führe. Wenn diese Vermutung berechtigt ist, dass er also die Theorie der vollkommenen Ganzheit des Seins gegen atomistische Kritiker verteidigt und nur dazu seine vertrackte Infinitesimal-Spekulation angestellt hat, mit seinem Vorgehen zugleich eine Methode der Atomisten karikierend, dann hat er sich damit eine mit den selbstgewählten Mitteln kaum zu bewältigende Aufgabe aufgeladen. Denn Absurditäten und Paradoxien können zwar wachrütteln, aber kaum von der Richtigkeit des eigentlich Vermeinten überzeugen.

Zu Gunsten von Zenon, der ohne Zweifel hoch intelligent und mathematisch versiert war, will ich aber eher davon ausgehen, dass er keine fromm apologetischen Absichten, sondern eher diabolisch hinterlistige Motive hatte. Dann kommt die Frage auf, wen er mit seiner frühsophistischen Spiegelfechterei verblüffen oder mit dem „mathematischen“ Anstrich seiner Beweisführungen verunsichern wollte. Oder aber schärfer: wen wollte Zenon mit dem augenscheinlichen Unsinn seiner Behauptungen und der völlig durchsichtigen Absurdität seiner Beweisführungen auf die Schippe nehmen? Etwa seine unbedarften Hörer, Leser und Schüler? oder den weisen Lehrer Parmenides mit seiner als statisch gedachten und wie eine ideale Kugel vorgestellten Ganzheit des Seins? oder aber seinen gleichaltrigen und vielleicht konkurrierenden Kollegen Anaxagoras mit dessen unendlich kleinen Stoffteilchen? Cui malo? Wem (wird es) zum Schaden? Umgangssprachlicher: Wem wird es schaden? Direkter: Wen sollte die Ironie treffen?

Vielleicht doch seinen Lehrer Parmenides. Es könnte ja sein, dass Zenon mit seinen pfiffigen Gedankenexperimenten seinen Lehrer Parmenides insgeheim veralberte, indem er dessen statische Weltsicht „mathematisch“ *ad absurdum* führte. Schüler und manchmal auch Söhne können an so etwas ihren Spaß haben! Falls Zenon auf solche Weise den Inhalt der Philosophie des Parmenides kritisiert hätte, dabei die Methode der infinitesimalen Teilungen ernst nehmend, hätte er sich aber eines für seine Absicht wenig geeigneten Mittels bedient. Denn die noch so abstrahierenden Aussagen des Parmenides bezogen sich dennoch auf die Wirklichkeit, auf das Ganze des Seins. Und Krafft (S. 54) konstatiert zu Recht, dass „Zenons bis ins Unendliche durchzuführende Dichotomie, die völlig abstrakt, das heißt rein mathematisch gedacht war, (sich) als nicht durchführbar (erwies), wenn man sie konsequent auf die dingliche Wirklichkeit, also physikalisch anwendete“.

Faktisch hält Zenon aber auch die Mathematik-Gläubigen unter seinen Hörern und Lesen zum Narren. Denn recht bedacht sind solche Gedankenspiele nur zu einem nütze, nämlich um die Fehlanwendung einer an sich korrekten mathematischen Methode zu demonstrieren, vor allem wenn diese unter Verzicht auf eigene Urteilsfähigkeit oder aber unter Versäumnis einer angemessenen Indikationsstellung der Wirklichkeit übergestülpt wird, ohne diese vorher genauer zur Kenntnis genommen zu haben. Das Mathematische mag dann zwar korrekt durchgerechnet sein, aber es wäre doch fehl am Platze. Und so etwas soll noch bis in unsere Zeit vorgekommen sein.

Mir selber erscheint das Ernstnehmen und Anwenden der infinitesimalen Methode in diesem Problembereich als gleichermaßen kritikwürdig wie das Ernstnehmen und Verteidigen der ins Irreale mathematisierten Philosophie des Parmenides vom Ganzen des Seins als idealer Kugel, und Zenon könnte es fast gelungen sein, beide zugleich *ad absurdum* zu führen. Denn in beiden Fällen geht es u. a. um den Missbrauch von Mathematik in einer Fehlanwendung auf Wirklichkeiten, die direkt erfahrbar sind und deren Mathematisierung methodisch enger auf solchen empirischen Erfahrungen aufbauen sollte.

Aber ganz abgesehen davon, was Zenon mit seinen Argumentationen bezweckte, eine Bestätigung der Lehren seines Meisters Parmenides oder aber doch deren Widerlegung, so hat er immerhin die unendbaren Reihen in das Philosophieren eingeführt. Mansfeld hebt lobend hervor, dass seine Entdeckung des *regressus in infinitum* allein schon genüge, Zenons dauerhaften Ruhm zu begründen, denn diese Vorgehensweise werde immer noch als gültiges Mittel der Argumentation und als mathematisches Verfahren zur Bestimmung eines Grenzwertes angewendet. Nach Mansfeld (S. 21/22) verlieren Zenons Bewegungsparadoxien jedoch ihre Gültigkeit, sobald sie in der Symbolsprache des (von Leibniz und Newton entwickelten) Infinitesimalkalküls behandelt werden, was er gleich wieder einschränkt: „Wichtig ist allerdings, dass die ursprüngliche Formulierung der Integral- und Differentialrechnung ... im 17. Jahrhundert mit ihrem ‚metaphysischen' Begriff des ‚unendlich Kleinen' noch nicht gegen die von Zenon formulierten (H. Sch.: von diesem konstruierten!) Schwierigkeiten abgesichert war. Erst die Bestimmung des Limes-(Grenzwert-) und des Konvergenzbegriffs ... haben Zenons Bewegungsparadoxien ... offenbar entkräftet. ... Dass die Bewegung aus einer unendlichen Folge von ‚Ruhen" zusammengesetzt ist und die Zeit aus einer unendlichen Folge von ‚Jetzten', ist nicht paradoxer als ... dass die ausgedehnte Linie aus einer unendlichen Folge unausgedehnter Punkte (H. Sch.: gegen Null gehender Strecken!) besteht. Mit dem Begriff der momentanen Geschwindigkeit als Grenzwert einer beliebig konvergierenden Folge lässt sich in der mathematischen Sprache einwandfrei arbeiten" (ebd.).

Dennoch schreibt Mansfeld anschließend (S. 23), offenbar voller Respekt, Zenons Argumente hätten „mehr als 2500 Jahre auf ihre Widerlegung warten müssen. Die erstaunliche Tatsache, dass sich seine Paradoxien in engster Weise mit den wohl wichtigsten mathematischen Entdeckungen der Neuzeit berühren, hat während der letzten Jahrhunderte manchen Wissenschaftler beschäftigt.... Es ist sogar die Frage, ob die Diskussion über (seine Paradoxien) ein Ende nehmen wird", und Mansfeld versteigt sich schließlich zu der Behauptung, ihnen ließen sich „in neuer Formulierung anscheinend immer wieder neue logische, mathematische und physikalische Probleme abgewinnen" (ebd.). Und noch im Brockhaus von 1994 ist zu lesen, dass die von Zenon herausgearbeiteten Antinomien (!) bis heute keine Lösung gefunden hätten. Welch ein Armutszeugnis! Denn die Unlösbarkeit eines Problems braucht nicht in der Sache selbst zu bestehen, sondern in den zu ihrer Lösung vergeblich angewandten, weil ungeeigneten Begriffen und Lösungsmethoden, und die könnte man als verfehlt aufgeben, durch andere ersetzen oder sie wenigstens verbessern. Aber es gibt ein „credo quia absurdum" nicht nur in der Theologie des Tertullian, sondern anscheinend auch in der Mathematik und in den Naturwissenschaften

In einem weniger euphemistischen, sondern eher kritischen Sinne könnte ich Mansfelds Ansicht von der besonderen, wenn auch negativen Bedeutung des Zenon dennoch in einem Punkte zustimmen. Denn bei Zenons Analyse des Wettrennens zwischen Achill und der Schildkröte könnte es sich um einen ähnlichen Denk- oder Methodenfehler handeln wie bei der später zu diskutierenden Cantorschen Begründung einer von ihm behaupteten „Gleichmächtigkeit" unendbarer Folgen von natürlichen, geraden und ungeraden Zahlen. In beiden Fällen, bei Zenon und bei Cantor, geht es um die „bijektive" Zuordnung von Folgen und deren Unterbrechung durch willkürlich eingeführte Stops, mit vergleichbar „paradoxen", nein, der Wirklichkeit bzw. der Logik widersprechenden Ergebnissen.

### 4.3.3. Aristoteles: potentiell und aktual Unendliches

Der griechische Philosoph **Aristoteles**, aus Stagira in der östlichen Chalkidike stammend (384 – 322 v. Chr.), gehörte bis zu Platons Tod zu dessen Akademie. Er selbst gründete die peripatetische Schule, so genannt nach den Wandelgängen (gr. peripatos) des Lykeion im Hain des Apollon Lykeios. Als bahnbrechend gilt seine Ausarbeitung der formalen Logik und verschiedener einzelwissenschaftlicher Methoden, die zur Aufteilung der Philosophie in einzelne Disziplinen führte, nämlich der Erkenntnistheorie, Logik, Wissenschaftstheorie, Metaphysik, Ethik und Politik, sowie der Naturphilosophie, die er in den „Physica" ausführlich abgehandelt hat. Nach Otfried Höffe (Klassiker der Philosophie, Bd.1, Beck, München 1994) untersuchte Aristoteles in seiner „Physik" die apriorischen Voraussetzungen jeder Naturerfahrung. Insgesamt sei sein naturphilosophisches, metaphysisches und ethisches Denken jedoch von einer Mannigfaltigkeit von Prinzipien bestimmt, womit stillschweigend jedes vorschnell angesetzte Einheitsprinzip verworfen werde, ohne deshalb das wissenschaftstheoretische Ziel einer Letztbegründung ganz aufzugeben (Höffe, S. 71).

Aristoteles, der den Zenon in der einen oder anderen Hinsicht offenbar ernst nahm – er nannte ihn den „Schöpfer der Dialektik" -, befasste sich getreu seiner Devise „Wer den Knoten nicht kennt, kann ihn auch nicht lösen" in der „Physik" sehr gründlich mit Zenons Paradoxien, in den Abschnitten O 8, 263a, 3 ff., 15 ff. mit der ersten und im Abschnitt Z 9, 238b, 14 ff. mit der zweiten Paradoxie, die er auf ihre begrifflichen Voraussetzungen hin untersuchte. Beide Texte, in deutscher Übersetzung, konnte ich aus dem Buch von Mansfeld (S. 40 – 47) entnehmen. Auf die Gefahr hin, dass ich von den oft etwas umständlichen, wenngleich um Klarheit bemühten Erörterungen des Aristoteles bzw. wegen etwaigen Unklarheiten der Übersetzung irgendetwas nicht genügend verstanden haben sollte, gebe ich wenigstens das, was mir aus ihrem Inhalt einleuchtete, wörtlich wieder, und was dieser mir an Anregungen vermittelt hatte, ergänzt durch eigene Einschätzungen, werde ich mit eigenen Worten vorbringen. Es sei hier nur kurz angemerkt, dass Aristoteles (oder sein Übersetzer ins Deutsche!) es einfacher gehabt hätte, wenn er in allen Fällen, in denen es ihm um die unbegrenzte Fortsetzbarkeit ging, statt des Wortes „unendlich" den genauer selbstexplikativen Begriff „unendbar" verwendet hätte. Die trotz der von Aristoteles eingeführten Unterscheidungen zwischen „potentiell" und „aktual" immer noch mit dem hybriden Begriff „unendlich" operierenden Argumentationen des Philosophen könnten, wie ich meine, durch die Verwendung der prägnanteren Begriffe „unendbar" versus „allendlich" noch eindeutiger und zur Klärung der Sachlage geeigneter werden.

Im Zusammenhang mit seiner Analyse der ersten und zweiten Zenonschen Paradoxie entwickelt Aristoteles den überaus wichtigen Begriff des potentiell Unendlichen. Er versucht zunächst, die Zenonschen Argumentationen formal wiederzugeben, um sie dann kritisch zu analysieren. Nach Mansfeld (S. 40 ff.) geht Aristoteles in Hinsicht auf die erste Zenonsche Paradoxie davon aus, dass Zenon die kontinuierliche Bewegung des Läufers auf dessen Gesamtstrecke in zwei Hälften teilt, nämlich mit einem Punkt, der sowohl zum Halbieren der Strecke als auch zum Zählen der halbierten Strecken dient. Wenn man in dieser Weise vorgeht (H. Sch.: und insofern mit theoretischen „Zwischenstops" arbeitet), wird die Linie der eigentlich kontinuierlichen Laufbewegung unterbrochen. In dem gleichermaßen kontinuierlichen Medium wird die faktische Bewegung jedoch bis zum Ziel kontinuierlich fortgesetzt. Die durch fortlaufende Teilungen hergestellten und schließlich unendlich vielen Hälften sind in diesem Medium bloß der Möglichkeit nach als kleiner werdende Hälften enthalten, jedoch nicht in Wirklichkeit. Nur wenn man diese unendlich vielen Hälften als faktisch vorhanden vermeint, kann man die kontinuierliche Bewegung in Zenonscher Weise zum Stehen bringen. Das erreicht nur der, der die kleiner werdenden Hälften nach Zenons

Anweisung durchzuzählen versucht, und er muss dazu notwendigerweise jeweils mit dem grenzsetzenden Punkt eine Strecke beenden und eine nächste (halbe!) beginnen. Dazu möchte ich (H. Sch.) folgendes bemerken: Kritisch ist dabei vor allem die bis ins Unendliche wiederholte (bijektive?) Zuordnung der durch Halbierung gewonnenen theoretischen Teilstrecken zu den vom Läufer faktisch zurückgelegten Teilstrecken, was zu virtuell (!) immer kleineren Strecken auch für den Läufer führt, der tatsächlich aber mit annähernd gleicher Geschwindigkeit weiter läuft und bald nach Umrundung des Stadions am bisherigen Startpunkt sein Ziel erreicht.

Aristoteles betont weiterhin (nach Mansfeld, S. 45), dass es, was das faktisch Vorfindbare betrifft, nicht möglich sei, eine unendliche Mannigfaltigkeit der Ausdehnung oder der Zeit bis zum faktischen Ende zu durchlaufen, wohl aber, was das Potentielle, als Möglichkeit Denkbare, anlangt. Nur im mathematischen Sinne könne jemand in kontinuierlicher Bewegung eine unendliche Mannigfaltigkeit durchlaufen, auch eine, die sich aus immer kleiner werdenden Hälften einer Strecke ergibt; aber mit dem tatsächlichen Gegebensein des Laufs verhalte es sich anders (H. Sch.: da der Läufer nach dem Lauf über die endliche Strecke innerhalb des Stadions in endlicher Zeit sein Ziel tatsächlich erreicht).

Die Wiedergabe der zweiten Paradoxie des Zenon beginnt Aristoteles (Phys. Z 9, 239b, 14 ff.) mit einer kurzen Zusammenfassung von dessen These: „Das Langsamste wird in seinem Lauf nie vom Schnellsten eingeholt werden. Denn es ist notwendig, dass das Verfolgende vorher dort ankommt, wo das Fliehende eben weggegangen ist, so dass notwendig das Langsamste immer wieder einen gewissen Vorsprung hat ... Sogar der schnellste Held der Dichtung (also Achill) wird das Langsamste (die Schildkröte) nicht einholen ... Das Argument führt zwar zu dem Schluss, dass das Langsamste nicht eingeholt wird, aber der Grund ist derselbe (wie bei den Halbierungen des Laufs im Stadion): in beiden Argumenten ergibt sich, dass das Ziel nicht erreicht wird, wenn die ausgedehnte Strecke in einer bestimmten Weise (H. Sch.: nämlich durch sukzessives Verkürzen) geteilt wird. ... So ist die Lösung notwendig dieselbe. Die Feststellung, (jenes,) was einen Vorsprung habe, werde nicht eingeholt, **ist falsch**. Solange es einen Vorsprung hat, wird es gewiss nicht eingeholt; es wird aber dessen ungeachtet eingeholt, sobald man zugesteht, dass (der Verfolger und die Verfolgte) eine endliche Strecke bis zum Ende durchlaufen“ (zitiert nach Mansfeld, S. 46/47).

Nach Krafft (S.49) hat Aristoteles damit aufgewiesen, dass zwischen der (theoretisch möglichen) unendlichen Teilbarkeit und den tatsächlich durchgeführten Teilungen unterschieden werden muss, da letztere als unendliche Teilung nicht möglich seien. Hier taucht wieder die grundlegende Differenz auf zwischen einerseits dem physikalischen Atomismus des Leukipp und Demokrit und andererseits dem mathematisch unbegrenzten Weiterteilen des schon Halbierten bei Zenon. Auch Mansfeld (S. 20/21) betont, dass die von Zenon angesetzte Teilung *in infinitum* zwar möglich sei, denn Strecke, Bewegung und Zeit ließen sich begrifflich (mathematisch!) bis ins Unendliche teilen, aber keinesfalls aktual oder faktisch; denn Zeit und Strecke sind kontinuierlich (während die faktische Bewegung endlich und aus Schritten zusammengesetzt ist). Auf der Grundlage dieser Überlegungen verwirft Aristoteles den infiniten Regress als Methode zur wissenschaftlichen Begründung faktischer Gegebenheiten.

Für Aristoteles ist nun die dynamische Vorstellung des Erzeugens einer Folge weitgehend mit dem Begriff des **potentiell Unendlichen** identisch, zumindest ist für ihn die Folge ein Hilfsmittel, um den Prozess der unbegrenzbaren Annäherung an das dennoch nie endgültig zu Erreichende beschreiben bzw. nachvollziehen zu können (Weigand, S. 44). Aristoteles verdeutlicht das in einer prägnant kurzen Aussage: „Allgemein nun ist Unendlichkeit lediglich (eine) fortschreitende Sukzession von Gliedern (einer Reihe), wobei jedes Glied durchaus endlich ist, aber eben auf jedes Glied jedes Mal wieder ein anderes folgt“ (Physik III, S. 75 f., 206 a, zitiert nach Weigand S. 43). In einer dynamischen Sichtweise sieht Aristoteles in der Möglichkeit des fortwährenden Anfügens von Gliedern beim Aufbau einer (unendbaren) Folge die Grundlage des Begriffs der potentiellen Unendlichkeit (ebd.). Ihm geht es „... um das Unendliche im Sinne des **nicht** bis zu einem Abschluss Durchlauf**bar**en“ (Physik III, S.96, 204 a), was bis in die Wortwahl weitgehend dem von mir bevorzugten, weil kürzeren Begriff der „**Un**end**bar**keit“ entspricht (Hervorhebungen durch mich). Weigand betont eine aus der Aussage des Aristoteles ableitbare Konsequenz: Da die Gesamtheit (der unendlich vielen Schritte) niemals völlig „durchlaufen“ werden kann, ist das Unendliche in diesem (potentiellen) Sinn also nicht wirklich vorhanden. Es zeigt sich nur in der Möglichkeit der Vorstellung eines unendlichen Prozesses, etwa beim Fortschreiten der Zeit, beim fortlaufenden Zählen oder beim fortlaufenden Teilen eines räumlichen Gebildes (Weigand S. 43). Für Aristoteles bleibt somit der Begriff der Unendlichkeit noch mit der Vorstellung der Möglichkeit eines potentiell unendlichen Prozesses verbunden, denn „das Unendliche gibt es nur im Modus der Möglichkeit“ (Physik III, S. 75, 206 a). In der Sprache der Vorsokratiker formuliert lässt Aristoteles das Apeiron nicht als ein wirklich Existierendes gelten, sondern nur als Unbegrenztheit der Möglichkeit nach, also im Bereich des potentiell Existierenden.

Aristoteles entwickelte neben dem Begriff des potentiell Unendlichen auch den des **aktual Unendlichen.** Die von Aristoteles in seiner Physik (III, 1 – 3) eingeführte Unterscheidung zwischen den beiden Kategorien, einerseits der Möglichkeit, Fähigkeit oder Potentialität (dynamis), andererseits der Aktualität (energeia), bestimmte seitdem das abendländische Denken (Höffe, S. 75). Mit seiner Unterscheidung zwischen dem potentiell und dem aktual Unendlichen ist Aristoteles ein ganz großer Wurf gelungen. Allerdings galt für ihn erst in seiner Metaphysik (Met. IX, 1 – 9), dass das aktual Seiende im Rang höher stehe als das potentiell Seiende (Höffe, S. 80).

### 4.3.4. Unendlichkeitstheorien <u>nach</u> Aristoteles

Die aristotelische Unterscheidung zwischen einerseits einer potentiell unendlichen (H. Sch.: unendbaren) Teilung mathematischer Kontinua und andererseits einer lediglich endlichen Teilung bis zum nicht weiter teilbaren Atom im physischen Bereich wurde von seinen Schülern und Nachfolgern in der einen oder anderen Weise weitergeführt. Auf den Begriffen der potentiellen und aktualen Unendlichkeit und ihrer Differenz aufbauend zog sich dann durch die ganze Geschichte der Philosophie und insbesondere der Mathematik die Frage nach dem Wesen des Unendlichen. So wurden schon die großen Wissenschaftler Alexandrias, vornehmlich der Mathematiker, Astronom und Geograph Klaudios Ptolemaios (100 – 160 n. Chr.), und auch die Wissenschaftler Roms von den aristotelischen Lehrschriften und ihrem streng wissenschaftlichen Stil stark beeinflusst (Höffe, S. 91).

Solche Überlegungen wurden wieder aufgegriffen von dem arabisch-spanischen Aristoteles-Kommentator und Philosophen **Avẹrroës** (Ibn Ruschd, 1126 – 1198), wenn er schreibt: „Eine Gerade kann als Gerade bis ins Unendliche geteilt werden; dieses ist aber unmöglich, wenn man eine Gerade nimmt, die aus Erde (= Materie) gemacht wurde“ (zitiert nach Krafft, S. 120). Danach wäre es unmöglich, dass etwas Materielles in seiner Größe unendlich weiter verringert wird oder aber bis ins Unendliche zunimmt, denn dabei würde das in minimaler Größe oder maximaler Menge begrenzte Seiende verlassen und durch nur denkbare, aber nicht vorfindbare Weiterungen spekulativ extrapolierend ins Beliebige extremalisiert..

Der deutsche Kirchenfürst, Theologe und Philosoph **Nikolaus von Kues** (1401 – 1464) unterschied wohl unter Berufung auf Aristoteles das positiv aktual Unendliche als wesentliches Merkmal Gottes deutlich von dem, was endlich, wenngleich seiner Potenz (seiner Möglichkeit) nach unendlich ist. Eine potentielle Unendlichkeit des Raumes und der Zeit komme der Welt (der Materie) im Sinne ihrer **un**endlichen Teil- und Vermehr**bar**keit zu (was wieder an den von mir bevorzugten Begriff der „**Un**end**bar**keit" erinnert).

Der niederländische Philosoph Baruch (Benedict) de **Spinoza** (1632 – 1677) spekulierte monistisch über Gott als die eine Substanz, aus der alles, was ist, notwendig folgt, sowohl Materie wie Geist, beides (alles) gleichermaßen göttlich. Die Gedankenwelt des Spinoza wurde von Heinrich Heine in seiner 1834 verfassten Vorrede seiner Abhandlung „Zur Geschichte der Religion und Philosophie in Deutschland" (Reclam, Stuttgart, 1997) so zusammengefasst: „Benedict Spinoza lehrt: Es gibt nur eine Substanz, das ist Gott. Diese eine Substanz ist unendlich, sie ist absolut. Alle endlichen Substanzen derivieren von ihr, ... , sie haben nur relative, vorübergehende, akzidentielle Existenz. Die absolute Substanz offenbart sich uns sowohl unter der Form des unendlichen Denkens, als auch unter der Form der unendlichen Ausdehnung. Beide ... sind die zwei Attribute der absoluten Substanz (die wir erkennen)" (S. 61). Solche Gedanken erinnern an das eine kugelförmige ideale Sein des Parmenides und sind später in dem als unbedingt und vollkommen verstandenen „Absolutum" der deutschen Philosophie und des Pantheismus wieder aufgegriffen worden.

Manche Teile der Physik des Aristoteles „sind bis heute inhaltlich nicht veraltet, so die Untersuchungen zum Kontinuum (syneches) in Buch VI. Denn dort werden schon die begriffsanalytischen Voraussetzungen zu den modernen (H. Sch.: mit Beginn der Neuzeit erkannten) mathematisch-physikalischen Problemen von Stetigkeit und Infinitesimalrechnung entfaltet" (Höffe, S. 74). Zwar prägte der Mathematiker und Philosoph G. W. **Leibniz** (1646 – 1716) den Begriff der „Monade", die auch beseelt sein kann, in höchster Vollkommenheit in Gott, dieser obersten Monade, und entfernte sich mit solchen Spekulationen von den eher atomistischen Auffassungen der Vorsokratiker und ihrer Nachfolger. Aber nach Anregungen auch schon durch Nikolaus von Kues machte er umfassend Gebrauch von unendlich kleinen und unendlich großen Zahlen zunächst noch im Sinne des aktual Unendlichen (Weigand, S. 44). Seine Beschäftigung mit den Zusammenhängen von unendbaren Folgen und Differenzenfolgen legte den Grundstein für seine spätere Infinitesimalrechnung, in Konkurrenz mit dem englischen Mathematiker, Physiker und Astronomen Isaac **Newton** (1643 – 1727)**,** der ein sehr ähnliches Kalkül entwickelt hatte.

Auch Immanuel **Kant** 1742 – 1804) befasste sich mit der Problematik des Unendlichen (im Folgenden referiert nach Krafft, S.178/179). Ihm ging es „um das Problem, wie die bis ins Unendliche mögliche Teilbarkeit des Raumes sich mit der endlichen Teilbarkeit der Materie vereinbaren ließe". Er nahm an, „dass die Körper aus der Zusammensetzung kleinster Teilchen (Monaden) bestehen", die nicht weiter teilbar sind. Demgegenüber betont Kant, dass „der Raum, den die Körper erfüllen, ... ins unendliche teilbar (sei)". Daraus folgert er: „Da ein jeder Körper aus einer bestimmten Anzahl einfacher Elemente zusammengefügt ist, der Raum jedoch, den er erfüllt, eine unendliche Teilung zulässt, so wird ein jedes dieser Elemente einen Teil des Raumes einnehmen, der noch weiter teilbar ist.. . (Somit) ist hinreichend ersichtlich, dass die Teilbarkeit des Raumes der Einfachheit der Monade nicht widersteht", und noch physikalischer gedacht: „Die Monade bestimmt den kleinen Raum ihrer Gegenwart ... durch ihre Sphäre der Wirksamkeit, durch die sie die (benachbarten) Monaden von einer weiteren Annäherung abhält". Der von Kant betonte Unterschied zwischen der Unteilbarkeit der Monaden (die alten Griechen nannten sie Atome, wir nennen sie verallgemeinernd „Elementarteilchen") einerseits und der beliebigen Teilbarkeit (aber auch Vergrößerbarkeit)

des Raums andererseits war eine theoretische Grundlage, auf der weitere physikalische und auch mathematische Präzisierungen aufbauen konnten. Noch der große Mathematiker Gauss hatte in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts den Begriff des aktualen Unendlichen abgelehnt (Mansfeld, S. 22).
Wenn wir, diesen Abschnitt abschließend, die Geistesgeschichte der Unendlichkeitsbegriffe zu überschauen versuchen, könnten wir zu folgender Gesamteinschätzung kommen: Angefangen mit den Differenzen zwischen den atomistischen Theorien einiger Vorsokratiker und der ideal kugelförmigen Ganzheit des Parmenides wurde immer wieder abwechselnd der eine oder der andere der beiden Hauptaspekte der Unendlichkeiten, die von mir so benannte Unendbarkeit oder aber die Allendlichkeit, als allein wirklich und richtig hingestellt, zumindest wurde der jeweils andere Aspekt unter dem einzig relevanten einen Aspekt subsumiert. Die stattdessen von Aristoteles vorgeschlagene einigermaßen reinliche Trennung des potentiell Unendlichen vom aktual Unendlichen wurde zwar später wieder aufgegriffen, aber dann setzten sich zeitweise entweder die Theologen mit den „unendlichen“ Vollkommenheiten des Monotheos durch, oder die Physiker mit der Unteilbarkeit der allerkleinsten Atome, oder aber die Mathematiker mit der Unendbarkeit von Zeit und Raum, formalisiert in der unbegrenzten Fortsetzbarkeit mathematischer Folgen bzw. der unbegrenzten Teilbarkeit von Strecken mit immer kleineren Schritten bis zur Null oder zum Grenzwert. Die für solche mathematische Formalisierungen kennzeichnenden Aspekte der Wiederholung, der Fortsetzung und vor allem der unbegrenzten Fortsetzbarkeit sollen in den folgenden Abschnitten zum Gegenstand von eingehenderen Analysen werden.

## 4.4. Der mathematische Folgenbegriff

### 4.4.1. Über Wiederholungen und Fortsetzungen

Ich beginne die Diskussion der mathematischen Reihen und Folgen, ähnlich wie bei anderen Themen, zunächst anschauungsnahe mit der Biogenese solcher Iterationen im Verlauf der Zeiten und mit der Phänomenologie des Erlebens von Wiederholungen.. Das Leben im Allgemeinen, also das Leben der niederen Organismen, Pflanzen und Tiere, ist durch alle Arten von Wiederholungen und Fortsetzungen charakterisiert. Schon bei den ersten und (relativ) primitivsten Einzellern, den Bakterien, die jedoch hochkomplex und differenziert sind im Vergleich zu gleich großen „Stücken“ der unbelebten Natur, gibt es aufeinander folgende Zellteilungen. Bei den höher organisierten Mehrzellern und unter ihnen den Pflanzen gibt es schon Wachstum mit Sprossbildung und periodischer Ablösung der nächsten Generation, und dann auch die erdgeschichtlich so bewährte Abfolge von Wachsen, Blühen, Bestäubung (durch den Wind oder durch Tiere) mit Vereinigung der Keimzellen („Sexualität“), die Bildung von Samen oder Früchten, und nach dem Ausstreuen oder Sichablösen der Samen irgendwann der „Tod“ der Pflanze. Von den Samen können einige es schaffen, wiederum zu keimen und zu wachsen ... und „da capo al fine“.

Bei den noch höher organisierten Tieren gibt es die für ihre heterotrophe Ernährung (durch Verzehr anderen, vor allem pflanzlichen Lebens), nämlich für das Finden und notfalls Erjagen der Nahrung so notwendige Fortbewegung (Schwimmen, Kriechen, Fliegen, vierfüßiges und auch zweibeiniges Laufen) in der Abfolge alternierender Bewegungen von bilateral angeordneten Gliedmaßen. Im Leben des Einzeltiers folgen Phasen der Aktivität und der Ruhe (des Wachens und Schlafens) aufeinander. Bei den Tieren sind die Generationen deutlicher voneinander abgegrenzt als bei den Pflanzen, und die Sexualität (die Vereinigung der verschiedengeschlechtlichen Keimzellen) und deren Sicherung durch innere Befruchtung, also durch die Begattung eines weiblichen durch ein artgleiches männliches Tier, spielt eine größere Rolle auch im Sozialverhalten. Eingebettet in die Spanne zwischen Geburt und Tod ist die Sexualität bei einigen Tiergruppen schon durch Brutpflege (Schützen und Ausbrüten der Eier, Stillen bzw. Säugen der saugenden Neugeborenen, Schutz und schließlich Anleitung der Jungtiere) ergänzt.

Bei Tieren gibt es den einen oder anderen Zeitgeber, eine innere Uhr, die zu einer bestimmten Jahreszeit oder unter anderen Anregungsbedingungen eine Stimmung (Balz-, Brunst-, Nestbau-, Vogelzug-, etc. -Stimmung) aufkommen lässt, in der spezifische Verhaltensweisen ggf. erstmals auftreten und dann wiederholt bzw. fortgesetzt werden, um dann irgendwann auszuklingen und von anderen Stimmungen und Verhaltensweisen, etwa dem Drang, sich zum Winterschlaf zurückzuziehen, abgelöst zu werden. Der Zeitgeber zeigt an, was für das Tier zur Zeit „dran ist“, was für das Tier eine von ihm vorher nicht gekannte Wichtigkeit bekommen hat, um nach Ablauf einer gewissen Zeit doch wieder so unwichtig zu werden wie zuvor. Könnte das auch für menschliche Verhaltensweisen, Stimmungen und davon beherrschte Lebensphasen gelten? Diese und andere Fragen sollen im **Anhang** ausführlicher diskutiert werden. Ich will hier nur einen Aspekt vorwegnehmen: Die menschliche Sexualität mit ihren lustvollen Wiederholungen ist in ihrem Vollzug immer wieder zeitlich begrenzt, die Lust ist nicht unendbar, und der Tod setzt auch dem menschlichen Leben ein unwiderrufliches Ende, ohne realistische Aussicht auf seine Fortsetzung nach einer Wiederauferstehung im Jenseits.

Selbst Sterne in ihren „ewigen“ Orbitalbahnen umeinander und in den weit ausschweifenden Dreharmen der Galaxien können plötzlich explodieren, im Doppelsternsystem mit dem anderen Stern zusammenstoßen, in einem „Schwarzen Loch“ verschwinden. Insofern können sie, nämlich mit dem völligen Verlust ihrer Individualität, endgültig sterben. Dann ist es vorbei mit ihrer Ewigkeit, mit ihren bisher ständig wiederholten und anscheinend so berechenbaren Umläufen. So können wir verallgemeinernd festhalten: Wiederholungen von **realen** Vorgängen garantieren keine unendbaren Fortsetzungen desselben. Das ist bei den **Zahlen** ganz anders.

### 4.4.2. Erkenntnistheoretische Hintergründe der Mathematik

Soweit es um Zahlenfolgen geht, stütze ich mich im Folgenden weitgehend auf die Abhandlung von Hans-Georg Weigand „Zur Didaktik des Folgenbegriffs“ (Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik, Bd. 21, BI-Wiss.-Verlag, Mannheim, 1993). Bevor er sein eigentliches Thema, die mathematischen Folgen, eingehend abhandelt, trägt er einige bedenkenswerte **meta-mathematische Vorüberlegungen** vor:

Das zielgerichtete und effektive Handeln eines Menschen setzt seine ausreichende Vororientierung durch Andere bzw. seine dabei entwickelte Fähigkeit voraus, sich selber jeweils neu orientieren zu können. Vor allem für das zweite ist ein genaues Hinschauen nötig, damit der Mensch eine klarere „Anschauung“ gewinnt von dem, „was gerade der Fall ist“. Aufgrund von Alltags-Erfahrungen kann sich ein anschauungsgebundenes intuitives Wissen als zumindest subjektiv richtig herausstellen (Weigand, S. 5 – 14). Solche der Orientierung dienenden Anschauungen bilden sich aus der eingehenden Beschäftigung mit diesem oder jenem Teile der Realität heraus, gestützt und weiter gefördert durch das Kommunikations- und Denkwerkzeug der Sprache und darüber hinaus durch die Erkenntnismethoden der Wissenschaften.

Auch die Wissenschaft ist in ihren Anfängen und ihren noch heute gültigen Grundlagen anschauungsgebunden. Bis heute spielt in ihr die Intuition eine große Rolle. Das gilt auch für die jeweils neu in der geistigen Entwicklung des einzelnen Menschen geforderte und mögliche Entwicklung des Verständnisses von differenzierteren Begriffen, insbesondere aber zur Ermöglichung einer Einsicht in umfassendere Zusammenhänge. Der von den Mathematikern und Philosophen Brouwer und Weyl propagierte Intuitionismus hat zum Ziel, den Sinn für das anschaulich Gegebene zu stärken, indem er sich auf die gewöhnliche intuitive Erkenntnis beruft, welche das in der Anschauung Gegebene rein zur Sprache bringt.

Die anschauungsgebundene Intuition spielt auch in der **Heuristik** eine wichtige Rolle. In der Heuristik geht es insgesamt um die geistigen Abläufe und Denk-Operationen, die zum Finden der Lösung eines Problems von Nutzen sind (Weigand, S. 204). Im engeren Sinne ist ein **Heurismus** ein Verfahren oder eine Strategie zum Finden der Lösung eines selbst erkannten Problems oder einer fremd gestellten Aufgabe. Nach der eingehenden Erkundung der Problemlage besteht ein wesentlicher weiterer Schritt in der **Hypothesenbildung**, die sich anfangs auf Plausibilitäten stützt und dann Vermutungen präzisiert, die zunächst noch gewagt, strittig, oder wenigstens provisorisch sein können. Aber was immer wir über die Welt erfahren, das involviert auch weitere Fragen und Zusammenhangsvermutungen, schon im Alltag, aber erst recht in den Wissenschaften, und dort bis zur Formulierung wohlbegründeter, aber zunächst noch nicht methodisch überprüfter wissenschaftlicher Hypothesen, die dann aber empirisch überprüft werden sollten.

Auf die Bildung und Überprüfung der Hypothesen sinnvollerweise erst folgend und davon abgehoben ist ein Vorgehen, das als **deduktiv**-logisches Schließen das Ziel hat, die Richtigkeit einer Ableitung zu beweisen und zu demonstrieren („ - quod erat demonstrandum"). Dessen Ergebnis und seine weitere theoretische Formalisierung sind, wenn die Voraussetzungen richtig und die Schlussverfahren korrekt sind, ebenso unbestreitbar und endgültig. Denn das Schließen erfolgt nach Normen, die in der formalen Logik begründet und verbindlich festgelegt worden sind. Poincaré verbindet sehr treffend die beiden Erkenntnishilfen, Intuition und Logik, in einer Aussage (von mir sprachlich leicht verändert): die Intuition braucht man zur Erfindung, die Logik zur Beweisführung (Weigand, S. 12), und ich ergänze für den Naturwissenschaftler: Die Beobachtung und das Experiment braucht man zur empirischen Überprüfung. Auf der Beobachtung aufbauend geht der Forscher zunächst **induktiv** vor: im Vergleich des Auftretens verschiedener Merkmale oder Relationen kann er Gleichheiten oder zumindest Ähnlichkeiten feststellen und dann auch Regelhaftigkeiten entdecken.

### 4.4.3. Eine intuitionistische Herleitung des mathematischen Folgenbegriffs

Weigand rekurriert in vielen Argumentationen seiner Abhandlung auf die **Intuition** als wichtige Verstehensgrundlage für die Mathematik. Das könnte auch schon für die vorgeschichtlichen Anfänge des mathematischen Denkens angenommen werden. In einer, wie ich hoffe, vergleichbar intuitionistischen Weise, nämlich auf menschlichen Grunderfahrungen aufbauend, will ich nun versuchen, an Hand von einigen Hinweisen aus der Abhandlung von Weigand mit ergänzenden eigenen Überlegungen den Weg der Begriffsbildung von **vor**mathematischen Anfängen bis zur Unendbarkeit mathematischer Folgen nachzuzeichnen.

Ich beginne mit der menschlichen Grunderfahrung, das **Miteinander** von Etwassen (damit ist eine Mehrzahl von „irgendetwas" gemeint) wahrzunehmen und irgendwo vorfinden zu können: eine Rotte von Wildtieren, eine Herde von Haustieren, eine Baumgruppe, und schließlich Menschen, die sich vorübergehend als eine Gruppe zusammengefunden haben, in der ein Einzelner sich mal dem einen, mal dem anderen Gruppenmitglied zuwenden und dabei seine Position in der Gruppe ändern kann. Die Gruppe bleibt dabei erhalten. Ihre Mitglieder könnten aber auch auf einem liegenden Baumstamm in einer Reihe nebeneinander sitzen. Eine solche **Kette** (vgl. Weigand, S. 121) ist zunächst nur ein einfaches Nebeneinander einzelner Elemente, das linear nach beiden Seiten fortgesetzt werden könnte (sofern der Baumstamm oder die Mauer genügend lang ist), auch mit der Möglichkeit, dass diese Fortsetzungen sich in Kreisform zusammenschließen, wenn Menschen im Kreis einen Reigen tanzen. Auch Perlen oder andere Glieder einer Kette können in einem Kreis zusammengeschlossen sein, sie können aber auch in Längserstreckung zwei andere Objekte, z. B. Herr und Hund, miteinander verbinden. Wenn wir jedoch einen Anfang der Kette festlegen und das Nebeneinander nur in einer Richtung fortsetzen wie in dem Falle, wo Leute an einem Kassenschalter anstehen oder an einer Bushaltestelle in einer Schlange hintereinander auf den Bus warten (engl. queuing up), dann nähern wir uns schon dem mathematischen Begriff der Folge, zunächst in der räumlichen Aufreihung bzw. zeitlichen Aufeinanderfolge weiterer Elemente. Bei all den aufgeführten Beispielen spielen zunächst weder die genaue Anzahl noch die genauen Abstände eine Rolle. Mathematisch handelt es sich bei den verschiedenen Arten ihrer Gruppierung daher wohl um topologische Formbildungen kleiner Mengen, um ein bloßes Miteinander bzw. Nebeneinander oder Hintereinander des immerhin Vergleichbaren.

Ich übernehme nun, mit wenigen Umgliederungen, Ergänzungen und Verdeutlichungen, die Argumentation von Weigand. Als Mathematik-Didaktiker interessiert sich Weigand natürlich besonders für die in diesem Fach in der Schulzeit wichtigen Lernschritte, in seinem Buch etwas eingeengt auf die Wege, den Kindern den zentral wichtigen Begriff der „**Folgen**" und insbesondere der Unendbarkeit ihrer Fortsetzung zu vermitteln. Es ist nur konsequent, und dazu auch noch effektiv, wenn Schüler über anschauungsnahe Intuitionen und mit einer jeweils auf ihnen aufbauenden Konstruktion von Grundvorstellungen (Weigand, S. 143) an Mathematik herangeführt werden. Derart fundierte Lernprozesse könnten sehr zum Verständnis und zur Nutzung mathematischer Vorgehensweisen beitragen (ebd.). Dabei spielt eine große Rolle, dass ein zunächst irgendwie flächig oder räumlich ausgebreitetes Miteinander und vor allem die Aufreihung als Nebeneinander oder Hintereinander auch als in der Zeit geschehend verstanden werden kann, als ein schon **wieder** da sein des (fast) Gleichen, als **Wieder**holung (Iteration), was die nunmehr zeitliche Unterscheidung zwischen „vorher", „jetzt" und „bald" bzw. „nachher" nahe legt, und damit auch die mögliche weitere **Fortsetzung** in einer Folge des annähernd Gleichen**,** so wie Tropfen aufeinander folgen können und ein Tag dem anderen.

Eingehend diskutiert Weigand die umgangssprachliche Bedeutung des Wortes ‚folgen'" (Kap. 1.2, S. 117-118). Durch das Wort „folgen", (genauer: durch die Aussage ‚auf ein Etwas **folgt** ein anderes Etwas') wird eine Beziehung zwischen – mindestens zwei – Etwassen ausgedrückt, die als räumliche bzw. zeitliche Beziehung aufgefasst werden kann. Bei räumlichen Beziehungen wird eine solche Relation ausgedrückt durch Wörter wie „nach, hinter, neben", auch „zwischen" oder „vor"; bei zeitlichen Beziehungen durch die Wörter „dann, danach, schließlich", auch „zunächst" oder „erst". Wenn „einer dem anderen folgt", kann aber zunächst offen bleiben, ob dies räumlich oder zeitlich gemeint ist, und beides kann miteinander verbunden sein. Die Zuordnung zum Raum oder zur Zeit wird in der Alltagssprache nicht genau beachtet: so kann jemand das Wort „nach" auch zeitlich verwenden (wie in „*Nach*mittag) oder bei einer Zaunreihe sagen: „und *dann* kommt der nächste Pfosten". Mit dem Wort „folgen" kann auch die Vorstellung einer räumlichen

Aufreihung oder zeitlichen Aufeinanderfolge **mehrerer** Etwasse verbunden sein, und durch Ausdrücke wie „eng zusammen“, „weit auseinander“, „im gleichen Abstand“, sogar „im Abstand von wenigen Minuten“ kommt schon ein quantitativer Aspekt zum Zuge. „Abstand“ kann wiederum sowohl räumlich wie zeitlich verstanden werden. Der Begriff „Folge“, zunächst intuitiv als Phänomen räumlicher oder zeitlicher Wahrnehmung erschlossen, kann somit konstruktiv weitere Aspekte erhalten (S. 146).

Wie schon das Miteinander durch Zusammenstellen von Etwassen zu einer Gruppe aktiv herbeigeführt werden kann, so kann auch die Wiederholung – insbesondere menschlicher Handlungen – bewusst bewirkt werden. Eine zeitliche Folge (das Nacheinander des Ähnlichen oder Gleichen) kann quasi konstruiert und kunstvoll hergestellt werden, in höchster Uhrmacherkunstfertigkeit schließlich mit der Konstruktion und Anfertigung der selbstaufziehenden Uhr. Doch das ist eine spät entwickelte Weiterung, von der ich nun wieder auf eine menschliche Grunderfahrung zurückkommen möchte.

Ich setze meine Überlegung fort mit einem besonderen Fall des Miteinander, Nebeneinander und schließlich Nacheinander des ungefähr Gleichen, zumindest Ähnlichen. Es geht um die **Endglieder der beiden Hände**, bei jedem gesunden bzw. unverletzten Menschen in gleicher Zahl, die vier verschieden großen Finger und der etwas anders geformte und positionierte Daumen, der zwar mit dem Zeigefinger eine Pinzette oder Greifzange bilden, aber doch auch den Fingern zugeordnet werden kann. Trotz ihrer leicht erkennbaren Verschiedenheiten können sie als miteinander zur Hand gehörig aufgefasst werden, sogar – wenn man die Hand flach auf den Tisch legt – als in einer Reihe nebeneinander angeordnet, der Daumen an die Reihe der Finger angeschlossen, und eben alle zusammen als Wiederholung eines immerhin Ähnlichen. Das macht es möglich, diese fünf Endglieder der einen Hand und dazu noch die der anderen Hand zum **Zählen** von anderen Etwassen zu verwenden, sofern auch diese als fast gleich und als immerhin gleichermaßen mit fünf bis zehn Fingern zählbar erscheinen. Schon Kinder können es wissen: man kann auch fünf Äpfel und fünf Birnen zusammenzählen, das sind dann eben zehn Früchte. Allgemeiner: Wie weit bzw. wie lange die bisher diskutierten Ketten oder Folgen faktisch fortgesetzt worden sind, lässt sich – wenn auch mühsam – mit den 10 Fingern der beiden Hände und weiterhin mit den 10 Zehen der beiden Füße abzählen. Durch das Zählen werden den verschiedenen dinglichen und gleichzeitig diskreten Elementen von Aufreihungen oder Aufeinanderfolgen abstraktere Zahlenwerte zugeordnet. Schließlich können auch irgendwelche aufeinander folgenden Etwasse zählbar sein, und bei ihrer „Aufzählung“ können räumliche oder zeitliche Aspekte in den Hintergrund treten oder ganz verschwinden hinter ihrer bloßen Zählbarkeit. Aber das impliziert zunächst noch keine „Unendlichkeit“ dieses Vorgangs, und in der vorgriechischen Mathematik erschienen Folgen als eine Aufreihung von noch endlich vielen Objekten oder Zahlen (Weigand, S. 41).

Es gibt Fälle, wo solche Etwasse nicht in ihrem Nebeneinander oder Nacheinander zählbar sind und sich auch nicht als Zählhelfer wie die Finger der beiden Hände anbieten, sondern wo stattdessen eine ungegliederte Körperlichkeit, ja sogar der unausgefüllte Raum und die aus der Vergangenheit über die Gegenwart in die Zukunft fließende Zeit dem Abgezähltwerden Widerstand leisten. Aber auch dann kann Zählbarkeit hergestellt werden durch einen Vorgang, den Weigand als „**Diskretisierung**“ bezeichnet. Mit Hilfe von Messgeräten und Maßeinheiten kann eine Diskretisierung des zuvor noch kontinuierlich Zusammenhängenden vorgenommen werden, indem etwa die Zeit in einzelne Zeitpunkte oder –intervalle unterteilt oder Gesamt-Abstände in Teilstrecken untergliedert werden, und dies wiederum mit Hilfe von Körperlichem wie dem „Fuß“, der „Elle“, des “Schritts“. Erst dadurch wird die quantitative Analyse auch des in kontinuierlicher Weise Gegebenen, z. B. die Abmessung von beliebigen

Längen und die Berechnung von beliebigen Flächen und Rauminhalten, möglich gemacht (S. 146). Die Diskretisierung ist somit der Ausgangspunkt für die Mathematisierung vieler realer Gegebenheiten und stellt innermathematisch die Beziehung zwischen Kontinuitäten und diskreten Werten her. Darüber hinaus ist sie eine grundlegende Voraussetzung für das Modularisieren von Algorithmen in der Informatik und für den verständigen Umgang mit dem Computer. Noch allgemeiner kann Diskretisierung auch beim Problemlösen durch ein Zerlegen der komplexen Gesamtproblematik in Teilprobleme hilfreich sein. Insgesamt kann der Philosoph vom Praktiker lernen, hier: vom Mathematik-Didaktiker, dass auch in der Geschichte des Denkens die Anschauung des real Vorgefundenen der theoretischen Abstraktion, Formalisierung und schließlich Mathematisierung vorausging, ihr über den Zwischenschritt der Diskretisierung zur Grundlage für Weiteres dienen konnte, so etwa für das Inbeziehungsetzen von höchst differenten und in sich spezialisierten Erfahrungs- und Wissensbereichen.

Die sich mit Hilfe der Zahlen eröffnende Möglichkeit, das Aufzählen von Etwassen fortzusetzen, etwa mit immer mehr Fingern und Zehen, mit meinen und deinen usw., führte schließlich zur Konstituierung des dekadischen Systems und relativ unabhängig davon - denn man konnte wie im duodekadischen System auch 12er-Gruppen aufeinander folgen lassen - zur Vorstellung der Folge der natürlichen Zahlen. Sie ist durch eine einfache Konstruktionsvorschrift definiert: Nach einer ersten Eins (das braucht schon kein Zeigefinger mehr zu sein) wird die Folge mit dem schon anfänglichen und immer neu (iterativ) eingesetzten Befehl „und jetzt eins weiter!“, also mit „+ 1“, fortgesetzt. Weigand (S. 132) formuliert es so: „ ... (bei der) Konstruktion der natürlichen Zahlen ((kann) das sukzessive Fortschreiten in Analogie zur Iteration von + 1 gesehen werden“, also im immer neuen **Herstellen** der nächstfolgenden Zahl. So erweist sich die Iteration in ihrer Weiterentwicklung zur Reihe der Natürlichen Zahlen als „ein letztes Fundament mathematischen Denkens“ (Weyl 1918, S. 37; zitiert nach Weigand S. 46), als ein grundlegendes Mittel der Mathematisierung.

### 4.4.4. Unendbare Folgen

In der Abfolge der Argumentationen fehlt aber noch ein weiterer, entscheidend neuer Schritt, der sogleich in die so vielschichtige Problematik der Unendlichkeiten hineinführt: Mit dem bloß endlichen Fortsetzen von Folgen kommt die Frage nach dem weiteren Anwachsen einer Folge und der möglicherweise **unbegrenzt weiteren Fortsetzbarkeit** der Iterationen auf (vgl. Weigand S. 115, S. 127), und auch, wie wir noch sehen werden, nach der unbegrenzten Fortsetzbarkeit von Teilungsschritten. Erst mit der Vorstellung der **un**begrenzten Iteration der Operation „+ 1“ können die intuitionistischen Ansätze zur Verdeutlichung jenes speziellen Unendlichkeitsbegriffs zum Abschluss kommen, den ich als „**Un**endbarkeit“ zu präzisieren versucht habe. Erst dann gibt es zwar eine erste natürliche Zahl, die 1, aber keine letzte, erst dann hat die Folge der natürlichen Zahlen kein Ende und sie ist, mit dem von mir vorgeschlagenen Begriff formuliert, **unendbar**. Der Mathematik-Didaktiker Freudenthal (1973, Bd. 1, S.101, zitiert nach Weigand, S. 127) sieht in dieser Erkenntnis sogar den Beginn des eigentlichen mathematischen Denkens, und er konstatiert das mit echter Begeisterung: „... der Ausruf ‚es geht ja immer so weiter’ ist wohl Mathematik, es ist die erste Mathematik, die die Menschheit produziert hat, und die das Individuum produziert. Es ist ganz große und ganz wichtige Mathematik, es ist erste und letzte Mathematik, höchste und tiefste Mathematik“. Durch die Möglichkeit des prinzipiell unbegrenzten Weiterzählens wird dem Schüler eine erste Vorstellung von der Idee des (potentiell) Unendlichen vermittelt, die verständlicherweise mit anderen Unendlichkeitsaspekten, z. B. den Gott zugeschriebenen, in eine gewisse Konkurrenz geraten kann. So ist es mir jedenfalls ergangen. Von der unbegrenzten Fortsetzbarkeit der Folgen ist aber nur der eine Aspekt der „Unendlichkeit“ tangiert, nämlich die von mir so bezeichnete Unendbarkeit, während wir für den anderen Aspekt, für die Allendlichkeit, einen anderen mathematischen Zugang nutzen müssen, nämlich den über die Mengenlehre. Zunächst aber zur Unendbarkeit.

So entscheidend wichtig die Zahlen zum praktischen Abzählen irgendwelcher Etwasse sind, so hat auch die „höhere“ Mathematik die Bedeutung der Zählzahlen anerkannt: „Die Zählzahlen ... erhielten ... die Bezeichnung ‚natürliche Zahlen’“ (Kaplan, Das Unendliche denken, S. 18). Mathematiker abstrahieren von der Unterscheidung zwischen „eins“, „zwei“, „drei“, „vier“, „fünf“, „sechs“, „sieben“, „acht“, „neun“, etc., und stellen allgemeiner fest, dass jede **natürliche Zahl** einen Nachfolger besitzt und dieser Nachfolger auch eine natürliche Zahl ist. So kann an jeder Stelle der Zahlenfolge, schon nach der 1, auch nach der 1.397, sogar noch nach der 1.472.139.856, einfach weitergezählt werden. Die **Folge** der nachfolgenden Zahlen ist somit **unendbar**. Es können an jeder Stelle dieser Folge nächstfolgende Zahlen genannt (bzw. nach einem dekadischen, duodekadischen oder binären System konstruiert) werden. Man kann demnach eine beliebig große Zahl quasi in einen imaginären Bildschirm eintippen und dann ist die Zahl auch schon da, und wenn man mit einer imaginären „Maus“ vor- oder zurückscrollt, dann generiert sie die ihr folgenden bzw. vorhergehenden Zahlen. Und wie durch einen Zauber, nein, eigentlich ganz konsequent, sind dann - und nur insoweit! – die hergestellten Zahlen auch „existent“, nämlich als methodisch hergestellte, von Menschen gemachte Inhalte des Denkens, die aber als Folge der natürlichen Zahlen unendbar sind.

Die Unendbarkeit gilt nicht nur, von ihrer primären Konstruktion her, für die Folge der natürlichen Zahlen, sondern auch für die verschiedenen in dieser Folge vorfindbaren und aus ihr konstruierbaren anderen Folgen. Sie ist aber mit den natürlichen Zahlen am augenscheinlichsten demonstrierbar und intuitiv erfassbar, denn zu jeder natürlichen Zahl kann man eine nächsthöhere Zahl angeben, angefangen mit der 1, dann 2, 3, 4, 5, 6, ... Man erhält auf diese Weise eine Folge, die nicht abbricht. Man kann dieselbe Folge auch mit einer Zuordnungsvorschrift ‚ist kleiner als’ ( < ) aufschreiben: ! < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < ... . Die Folge der natürlichen Zahlen kann auch in umgekehrter Richtung gelesen werden: ... 6, 5, 4, 3, 2, 1, und wenn man sie über die Null (0) hinaus zu negativen Werten fortsetzt (0, -1, -2, -3, -4, -5, -6, ...), erweitert sie sich zur Doppelfolge der ganzen Zahlen, die in beiden Richtungen unendbar ist, ohne dass man dann von doppelter Unendlichkeit (2 mal ∞) sprechen könnte! Die drei Punkte bedeuten in all diesen Fällen: es geht so weiter, also dass diese Zahlenfolge fortgesetzt werden kann (vgl. Weigand, S. 122/123). In unserer Sprache und Schreibe behelfen wir uns mit Kurzformeln: „und so weiter“ (usw), „et cetera pp“ (etc), „und so fort“ (usf). Aber sind solche Fortsetzungen ins Weitere damit schon „unendbar“? Zunächst noch nicht.

Diese Unendbarkeit einer Folge ist nicht erst „im Unendlichen“ festzustellen. Sie stellt sich nicht erst beim Versuch heraus, dennoch ihr Ende zu finden oder sie in Hinsicht auf ihre „Mächtigkeit“ mit anderen solchen Folgen zu vergleichen. Nicht erst das ehrfürchtige Erschrecken über die Vergeblichkeit dieses Versuchs erschließt uns die Unendbarkeit, sondern diese ist einer solchen Folge schon von ihrem Anfang an einkonstruiert, nämlich durch einen Algorithmus, der schon vorweg das gesetzmäßige Aufeinanderfolgen solcher Zahlen und die Unbegrenztheit der Fortsetzungen generiert hat. In einer dynamischen Sichtweise versteht Weigand (S. 110) die Folge als etwas im Entstehen Begriffenes (ähnlich auch Brouwer), als eine „werdende“ Folge, die schon von Anfang an mit dem ersten

Einsetzen der Operation + 1 als beliebig fortsetzbar (H. Sch.: und insofern unendbar) konstituiert ist.

Schon der große Mathematiker Gauss formulierte in seinem ca. 1800 entstandenen, aber erst 1912 veröffentlichten handschriftlichen Manuskript „Grundbegriffe der Lehre von den Reihen“, dass es bei einer klar definierten Reihe „als möglich angesehen wird, sobald man das Princip, nach welchem die Reihe gebildet wird (ihr Gesetz), kennt, sie so weit man will fortzusetzen“ (S. 390, zitiert nach Weigand, S. 68), und auch bei Euler zeigt sich das bestreben, die Fortsetzbarkeit durch eine (H. Sch.: schon von Anfang an geltende) Gesetzmäßigkeit zu beschreiben (Weigand, S. 67).

### 4.4.5. Die Unendbarkeit einer Folge wird durch Algorithmen determiniert

Somit kann der zunächst noch intuitiv-umgangssprachliche Folgenbegriff durch die Entwicklung von **Algorithmen** weiter mathematisiert werden, angefangen mit den einfachen Rechenschritten der Arithmetik, weiter ausgebaut zu komplexeren Rechenverfahren und zu den in mathematischen Teilbereichen entwickelten speziellen Vorgehensweisen. Den bei der Bildung eines umfassenderen mathematischen Systems zugrundeliegenden Algorithmus bezeichnet man als **Kalkül**. Darüber hinaus kann die Formalisierung bis zur **axiomatischen** Begründung von Mathematik insgesamt weitergeführt werden.

Im Zusammenhang mit der Entwicklung des Folgenbegriffs sollte aber der **Handlungs**aspekt des Algorithmus betont werden. Schon im Mathematik-Unterricht der Oberstufe können Schüler lernen, in der Reihenfolge von systematisch begründeten und zugleich zielführenden Rechenoperationen die grundlegende Idee zur Konstruktion von Algorithmen zu sehen, die das Lösen von Gleichungen und insgesamt die Berechenbarkeit (Turing 1937) allererst ermöglichen. Auch das im Maschinenmodell explizite Durchführen einzelner Programmschritte legt die dynamische Vorstellung eines Algorithmus nahe (vgl. Weigand, S.77). Der Algorithmus als eine Handlungsvorschrift schließt auch iterierbare Funktionen und unbegrenzt wiederholbare Rechenhandlungen ein (Weigand, S. 130). Schließlich wird das beim Aufbau der natürlichen Zahlen und anderer davon abgeleiteter Folgen eingesetzte iterative Vorgehen zur Grundlage aller möglichen unendbaren Prozesse. Der Folgenbegriff bildet somit durch die mit ihm verbundenen Vorgehensweisen die erkenntnistheoretische, insbesondere konstruktivistische Basis des Unendbarkeitsbegriffs. So können wir diesen Gedankengang mit der Feststellung abschließen: Zur „streng“ begrifflichen Begründung von „Unendbarkeit“ bedürfen wir der Mathematik und insbesondere einer die Folge der natürlichen Zahlen determinierenden Rechenvorschrift, eines Algorithmus. Und wir haben schon gesehen, dass dieser sehr einfach ist: + 1 !

Auf dieser Grundlage aufbauend kann noch einiges Weitere mittels des nicht nur in der Mathematik genutzten Denkprozesses der **Rekursion** entwickelt werden. Rekursiv wird eine zu definierende Größe oder Funktion auf eine (oder mehrere) bereits bekannte und definierte Größe oder Funktion zurückgeführt. So kann eine schon vorgefundene Folge nachträglich als Ergebnis einer Rechenvorschrift, eines einfacheren Algorithmus, verstanden werden, um dann durch eine solche rekursive Definition der Folge die zu wiederholende Beziehung aufeinander folgender Glieder ausdrücklich festzulegen und ihre Berechenbarkeit herzustellen.

### 4.4.6. Unendbare Annäherungen an einen Grenzwert

Weigand (S. 136 ff.) ergänzt und erweitert seine Analyse des Folgenbegriffs mit Ausführungen über Exhaustion und Approximation. Daraus und aus dem Brockhaus referiere ich das für unsere Fragestellung Wesentliche. Das Verfahren der **Exhaustion** (Ausschöpfung) wurde schon in der Antike ersonnen, wohl von Eudoxos von Knidos, um die Größe von Flächen bzw. das Volumen von Körpern auch dann einschätzen zu können, wenn sie nicht von Geraden bzw. von ebenen Flächen begrenzt waren. Nikolaus von Kues (1401 – 1464) bediente sich ähnlicher mathematischer Verfahrensweisen, etwa bei der Quadratur des Kreises, um solche Denkmöglichkeiten auch auf theologisch-philosophische Sachverhalte zu übertragen. So kann man die Fläche und den Umfang eines Kreises durch eine Folge von (dem Kreis einbeschriebenen) regelmäßigen Vielecken, vom Viereck über Achteck, Sechzehneck bis zum ∞-Eck, beliebig gut annähern, bis die besser einschätzbaren Vieleckflächen in ausreichende Übereinstimmung mit der zu bestimmenden Kreisfläche gebracht wurden. Auf solche Weise konnte näherungsweise auch die Zahl π bestimmt werden.

Die approximierende Exhaustion ist ein Vorläufer der Integralrechnung. So versteht man, in einem weiteren Anwendungsbereich der Mathematik und zur Infinitesimalrechnung (Analysis) verallgemeinernd, unter **Approximation** die geometrische Darstellung oder algebraische Bestimmung einer schwierig zu erfassenden mathematischen Größe (z. B. Zahl, Funktion, Kurve) durch einfachere Größen. Beispielsweise kann man sich der Kurve durch einfachere, an sie angelegte Geraden annähern. Bei mathematischen Problemen, die nur approximativ gelöst werden können, ist eine Abschätzung des verbleibenden Fehlerbereichs erwünscht.

Mathematische Folgen sind somit von großer Bedeutung auch für die Konstruktion von anschauungsnahen Verfahrensweisen der schrittweisen Annäherung (Approximation) einer Punktfolge (Kurve) an einen **Grenzwert**. Was zunächst in Hinsicht auf die Folge der natürlichen Zahlen und der davon abgeleiteten Zahlenfolgen verdeutlicht wurde, gilt daher im wesentlichen auch für Folgen, die sich einem Grenzwert annähern. Unter der Überschrift „Kontinuierliche oder stetige Annäherung“ führt Weigand (S. 138) dazu aus: „Ein Beispiel für eine kontinuierliche Annäherung ist das ‚Streben’ eines Punktes längs einer vorgegebenen Kurve gegen einen festen Punkt. Die Diskretisierung (H. Sch.: das Umsetzen in Teilschritte) des Vorgangs mit der Konstruktion einer entsprechenden Folge stellt hier eine Möglichkeit dar, den Approximationsvorgang mathematisch zu beschreiben. Eine Folge wird so zum Hilfsmittel für die Beschreibung eines dynamischen Prozesses“.

Mit solcher Verwendung von Folgen treten auch die Aspekte der Iteration, der Diskretisierung und der Aufzählung wieder in den Vordergrund (vgl. Weigand, S. 144). Es geht dabei um konvergente Folgen „von Näherungswerten mit unbegrenzt wachsender Genauigkeit“ (Kühnen, S. 25, zitiert nach Weigand, S. 135). Auch die Überlegungen über Approximationsprozesse und Grenzwerte tragen demnach zur Problematisierung des üblichen Unendlichkeitsbegriffs bei und legen die präzisere Wortwahl „Unendbarkeit der Teilungs- und Annäherungsschritte“ nahe, die das unbegrenzte Weitergehen bis immer nur fast zur Grenze am besten zum Ausdruck bringt. Denn es liegt die Frage nahe: Wird dieser Grenzwert mit solchen aufeinander folgenden Annäherungen „nach unendlich langer Zeit“ schließlich doch erreicht? „Erreicht“ wird er offenbar nie, denn es gibt nach der vermeintlich letzten Annäherung immer noch eine genauere mit noch mehr Stellen nach dem Komma.

### 4.4.7. Zusammenfassung

Ich will nun versuchen, den Ertrag der durch Weigands „Didaktik des Folgenbegriffs“ vermittelten Grundlagen und der davon angeregten eigenen Überlegungen zu einer, wie ich hoffe, stringenten Gesamtargumentation zu ordnen und damit auch zusammenzufassen:

Wir gingen aus vom ungeordneten **Miteinander** von Etwassen in einer Gruppe, kamen darauf aufbauend zu den umgangssprachlichen Bedeutungen des Wortes „**folgen**“, engten diese Bedeutungen auf bestimmte Aspekte ein und konnten sie damit präzisieren, so etwa die Etwasse linear geordnet im **Nebeneinander** der Kette, **iterativ** im Aufreihen des zumindest Ähnlichen im Raum bzw. nacheinander **wiederholt** in der Zeit. Sie wurden miteinander quantitativ vergleichbar mit Hilfe eines für alle möglichen Iterationen verfügbaren Aufzählungsmittels, anfänglich mit den Fingern der Hände, so dass in **Aufzählungen** bestimmte Zahlengrößen beliebigen Mengen von Etwassen zugeordnet werden konnten. Darüber hinaus konnte räumlich Geschlossenes und zeitlich Kontinuierliches **diskretisiert** werden durch Messungen mittels Maßen und Maßeinheiten, die Aufzählungen wiederum dynamisierbar durch **Algorithmen**, welche gleichartige **Fortsetzungen des Zählens** generieren. So erschloss sich uns allmählich der Begriff der mathematischen **Folge** mit der Möglichkeit ihrer **unendbaren** Fortsetzung. Schon von Anfang an unendbar ist die Folge der (üblicherweise dekadisch angeordneten) **natürlichen Zahlen,** erkennbar spätestens mit der „11“, mit der eine neue Zehnerreihe beginnt, die wiederum von weiteren Dekaden gefolgt werden kann, usw., usf., etc. Aus der Folge der natürlichen Zahlen können weitere Folgen abgeleitet werden, etwa die der geraden und der ungeraden Zahlen, und noch viele weitere, die allesamt schon von ihrem Anfang an als unendbar konstituiert sind. Mit Unendlichkeit im theologischen Sinn hat das eigentlich nichts zu tun. Für alle diese Folgen gilt also weiterhin, dass sie, eben wegen ihrer Unendbarkeit, niemals als vollständige Gesamtheiten gegeben sein können, sondern nur im aristotelischen Sinne des potentiell Unendlichen zu verstehen sind. Im Unterschied dazu behandelt Cantor unendliche Mengen als fertig gegebene Gegenstände des mathematischen Denkens, und betrachtet sie damit als aktuale Unendlichkeit im gleichermaßen aristotelischen Sinne. Nach der folgenden Zwischenüberlegung (4.5.) werden wir darauf zurückkommen.

Als für unsere Fragestellung wichtig erscheint mir, dass Intuitionen nicht nur zur Herleitung des Begriffs der unendbaren Zahlenfolgen dienen, sondern auf nunmehr höherem Niveau, der Mathematiker würde dann eher von „Vermutungen“ sprechen (vgl. die Poincarésche Vermutung), auch zur erkenntnistheoretischen Fundierung mathematischer Grundbegriffe beitragen können (Weigand S. 47). Weigand weist darauf hin, dass zur Entwicklung **neuer** Begriffe und Verfahren immer wieder auf Intuitionen zurückgegriffen und erneut darauf aufgebaut wird (S. 78), und er referiert Versuche, insbesondere den Folgen- und Grenzwertbegriff wieder stärker auf eine intuitive Basis zurückzuführen (S. 54). Verallgemeinernd stellt er fest, dass die grundlegenden Ideen des Intuitionismus (Brouwer und andere) darauf hinweisen, in Intuitionen eine Möglichkeit zur erkenntnistheoretischen Fundierung mathematischer Begriffe zu sehen.

## 4.5. Zwischenüberlegung: „alle“ und „jeder“

Es gibt verschiedene Bedeutungen von „alle“, die wir genauer voneinander abheben sollten:
Erstens: „Alle“ bedeutet manchmal nur allgemein und zugleich ungenau „**jeder** Einzelne gleichermaßen, ohne Ausnahme“ (lat. quisque, unusquisque, quicumque; engl. every, everything, everybody, each one, each ...). Wenn gesagt würde, „alle Menschen müssen

sterben“, dann heißt das nicht, dass etwa alle heute lebenden Menschen jetzt gleich sterben müssten. Die Aussage meint nur, dass **jeder** Mensch irgendwann und irgendwo sterben wird, und dass bislang und überall **jeder** Mensch schließlich gestorben ist (von ganz wenigen religionsgeschichtlich verbürgten Ausnahmen einmal abgesehen), wenn er alt genug geworden ist. Wenn aber von jedem Menschen die Rede ist, dann interessiert es gar nicht, wie viele Menschen dabei insgesamt in Betracht kommen. Es genügt, an einige von ihnen zu denken, und das könnten in unserem Beispielfall diejenigen sein, die schon moribund, also am Sterben sind. Es muss nur sicher sein, dass die Aussage im Prinzip auch jeden weiteren lebenden Menschen betrifft, und ebenso für alle früher lebenden Menschen Geltung hat. Das ist bei der oben vorgebrachten Aussage nur der Fall, wenn sie zum aristotelischen Syllogismus umgeformt wird: „Wenn die Sterblichkeit allen Menschen und das Menschsein allen Athenern zukommt, so kommt notwendig die Sterblichkeit allen Athenern zu“.

Wenn nun jemand etwas über „alle“ Zahlen einer bestimmten Klasse aussagt, z. B. „Alle reellen Zahlen können als Dezimalzahlen ausgedrückt werden ...“ (R. und E. Kaplan, S. 38), dann wäre zu prüfen, ob nicht das Wort „alle“ durch „jede“ ersetzt werden sollte: „Jede reelle Zahl kann als Dezimalzahl ausgedrückt werden“. Denn es ist fraglich, ob man überhaupt von „allen“ reellen Zahlen sprechen kann, weil das voraussetzen würde, dass man ihre Gesamtmenge, eben „alle“, feststellen oder auch nur deren Existenz behaupten könnte.

Zweitens: Im engeren Sinne bedeutet nämlich „**alle**“ (lat. omnes, omnia; engl. all of them, they all) die Gesamtheit der Vielen, die mit dem dann folgenden Substantiv angezielt sind, angefangen mit „alle beide“, wenn es um Zwillinge oder andere Paare geht. „Alle“ Teile oder Exemplare einer kleinen Menge können nämlich sehr wenige sein, z. B. „alle Pfirsiche“ können im gegebenen Falle gerade die sieben Pfirsiche sein, die sich noch in der Obstschale befinden. Jetzt sind es nur noch sechs, und alle sechs heben wir für unsere Gäste auf! Und schließlich ist ein Paar (von Zwillingen oder von Eheleuten, Mann und Frau) auf zwei Personen begrenzt, eine wirklich sehr geringe Menge, aber doch „alle beide“!

„Alle“ können auch noch vermehrt werden, etwa nach der Frage: „War das alles? Oder kommt noch mehr? Zugabe!“. Damit ist natürlich „mehr desselben oder ähnlichen“ gemeint. Wenn etwa die Wurstverkäuferin fragt: „Darf's auch mehr sein?“, dann meint sie „mehr als die 10 Scheiben Wurst, die schon auf der Waage liegen“, oder mehr als das vom Käufer genannte Gewicht des Bratenstücks, mehr als die von ihm bislang gewünschte Ware. Aber schließlich kann der Kunde sagen: „das wär's dann, ich hab jetzt alles“. „Alles“, das ist in diesem Fall die Gesamtheit der Wurst- und Fleischwaren, die dann im Einkaufsbeutel enthalten sind, wo also nichts vom Gewünschten fehlt, sondern wirklich alles „drin“ ist, in diesem Moment. Wenn der Kasper fragt: „Seid ihr alle da?“, dann will er wissen, ob alle Kinder, die kommen wollten und schon Eintritt bezahlt haben, auch schon ihre Plätze eingenommen haben, so dass kein Kind mehr draußen steht und auf Einlass wartet. Und wenn ein Kind fordert: „Ich will aber Alles! Und die Anderen sollen nichts kriegen!“, dann wird es entweder etwas Leckeres oder etwas zum Spielen sein.

Wenn in diesem Sinne von „allen Menschen“ die Rede ist, kann man fragen: „Meist du wirklich alle Menschen, die jemals gelebt haben und in Zukunft leben werden, oder doch nur die, die zur Zeit leben? Wie viele sind es eigentlich?“ Dagegen kann es nicht „alle Zählzahlen“ geben, denn man kann immer noch weiterzählen. Wenn einer glaubt, jetzt alle Zahlen im Zahlen-Sack zu haben, gibt es immer noch mehr, die noch nicht drin sind, und zumindest Gott könnte dann immer noch weiterzählen wollen, damit er, der ohnehin Allwissende, wirklich alles weiß, nämlich wie viel weitere Zahlen auf die bisher letzte Zahl folgen werden. Der ewige Gott kann sich ja beliebig viel Zeit fürs Weiterzählen nehmen!

Nach dieser Überlegung erscheint es als angemessener, nicht von „allen“ natürlichen Zahlen (bzw. geraden oder ungeraden oder Prim-Zahlen) zu sprechen, sondern in die Aussage die Formulierung „**jede** natürliche Zahl“ etc. einzusetzen, beispielsweise dass „**jede**“ solche Zahl in einer solchen Menge (oder vielleicht doch besser: einer solchen Zahlenfolge) enthalten ist.

Drittens: Das Substantiv „Alles“ kann noch etwas Anderes meinen. Es schließt dann nicht nur alle Elemente von etwas Spezifischem ein, sondern darüber hinaus auch alle Spezifität, **alles was es gibt** und was man zählen und in einen Mengensack einschließen kann (der dann natürlich mitzuzählen wäre, ebenso derjenige („Er“), der dies alles zusammengenommen und gezählt hat), eben wirklich „Alles“. „Alles“ schließt nichts Anderes mehr aus, weil es außer Allem nichts Anderes mehr gibt, nur noch Nichts (soweit es „Nichts“ überhaupt geben kann). So verstanden bedarf das Wort „Alles“ keiner Spezifizierung. Es macht dann auch keinen Sinn zu sagen, es gäbe noch mehr als Alles, etwa Alles und noch Einiges dazu. Dagegen kann es mehr als nur ein „gegliedertes Ganzes“ geben. Denn das „Ganze“ meint eine strukturierte Einschlussmenge, in der Vieles (ggf. auch Unterschiedliches) enthalten ist, in dem einen Ganzen dieses, in einem anderen Ganzen jenes. „Alles“ schließt demnach auch alle Ganzheiten ein.

## 4.6. Der mathematische Mengenbegriff

### 4.6.1. Einschätzen von Mengen

Lange vor der Verwendung von Zahlen zum Zählen und Rechnen gab es schon den von Wahrnehmungen gestützten Vergleich von verschiedenen Mengen, Gewichten, Entfernungen und Höhen. Noch ohne Abzählen, also auch ohne Zahlen, und auch ohne exaktes Ausmessen konnten seit je her kleinere und sogar größere **Mengen** als „wenige“, „manche“, „einige“, „viele“, „sehr viele“ usw. eingeschätzt werden. Verschieden große Mengen konnten als „(viel) weniger“, „(fast) gleich“ oder „(viel) mehr“ miteinander verglichen werden. Aber auch heute noch, in der jeweiligen Ontogenese eines Menschen, der schon als Säugling lernt, Sprache zu verstehen und dann bald auch selber zu äußern, gibt es schon früh ein intuitives Einschätzen des Mehr oder Weniger, des Größer oder Kleiner, etc.

Die einzelnen Körner des Getreides wurden nicht gezählt, sondern in ihrer Menge als Inhalt von Behältern (z. B. Tonkrügen) gemessen, oder auch in Säcke gefüllt und mit Gewichten verglichen und insofern gewogen. Denn mit dem Zählen von einzelnen Körnern hätte man lange zu tun gehabt, man wäre hungrig dabei geworden. Auch Wassertropfen sind nur mühsam zu zählen. Schneller geht es, wenn man die Menge einer Flüssigkeit mit Gefäßen misst. Die schwer zählbare Anzahl kleinster Teile wird also zur Einschätzung ihrer Menge besser durch das Volumen oder Gewicht dieser Menge repräsentiert, so dass man von einer Homogenisierung oder Entdiskretisierung zum Ziel einer Mengenschätzung sprechen könnte. Es wird vermutet, dass sowohl das griechische „litra“ als auch das lateinische „libra“ aus einer mittelmeerischen Wortwurzel „liƀra“ mit der Bedeutung „Gewogenes, Abgemessenes“ abgeleitet sind. Unser Hohlmaß Liter und die Münzen Lira (ital.) und Livre (frz.) stammen von dieser Wurzel ab, ins Deutsche bzw. Englische übersetzt als „Pfund“ bzw. „pound“. Man kann nämlich auch Goldstücke wiegen, sogar mit einem Aga Khan als Gewicht, statt sie, wie Dagobert es manchmal tat, mühsam abzuzählen.

### 4.6.2. Zählen mit Ordinal-Zahlen

Im Folgenden stütze ich mich auf Aussagen und Analysen von Robert und Ellen Kaplan in ihrem Buch „Das Unendliche denken. Eine Verführung zur Mathematik“ (Econ, München, 2003). Sie konstatieren im einführenden Kapitel: „Unsere mathematische Urerfahrung, individuell wie kollektiv, ist das Zählen – bei dem die Null keine Rolle spielt, da das Zählen immer mit eins beginnt“ (S. 18), und an anderer Stelle (S. 14): „...gehen wir ganz zum Anfang zurück: ... (zu) der Zahl Eins“. Die bildliche Darstellung der Eins ist zunächst der Zeigefinger, dann der gezeichnete oder geschriebene Strich, und „ihre geometrische Darstellung ist eindeutig: * (ein Punkt)“ (S. 14). Der Zahlenraum war ursprünglich begrenzt: es soll Völker (und auch bei uns einzelne Menschen!) geben, die nur bis drei zählen können, und für weitere Anzahlen brauchen unsere Kinder schon ihre zehn Finger, die später durch Zählzahlen (Abzählzahlen!) mit je eigenem Namen ersetzt werden, schließlich durch ein Zahlensystem (bei uns durch das dekadische und in der Computertechnik durch ein binäres System). Die fundamentale Bedeutung der Zählzahlen erscheint uns denkbar natürlich: „Jede dieser Zählzahlen ist lediglich eine endliche Summe von Einsen ...“ (S. 15).

Der Mathematiker präzisiert das bisher Diskutierte zum Begriff der **Ordinalzahl**. Im Unterschied zu ungeordneten Mengen (das könnte der Inhalt der Handtasche einer Frau sein) sind geordnete Mengen mit einer Ordnungsrelation versehen. Die dadurch definierte Ordnungsstruktur insbesondere der Zahlenreihe wird von N. Bourbaki zu den „Mutterstrukturen der Mathematik“ gerechnet. Von einer streng oder linear geordneten Menge spricht man, wenn je zwei beliebige Elemente immer durch die Ordnungsrelation verglichen werden können (Beispiel: $\mathbb{N}$ mit $\leq$). Für eine Ordnung erster Art ist die Kleiner-gleich-Relation ($\leq$) typisch. Ist nun eine Menge M linear geordnet und $a \in M$, dann ist diejenige natürliche Zahl n, die angibt, an welcher Stelle a bezüglich dieser Ordnung steht, die **Ordinalzahl** von a. Sprachlich entsprechen den Ordinalzahlen die Ausdrücke „der erste“, „der zweite“, usw. Die Ordinalzahl wird mengentheoretisch definiert als eine wohlgeordnete Menge $\alpha$ mit der Eigenschaft $\{ \in \alpha / \beta < \gamma$ für alle $\gamma \in \alpha$ .

Mit solchen Zahlen können Etwasse welcher Art auch immer (z. B. irgendwelche Personen, Dinge, Ereignisse, Elemente einer Menge, sogar Zahlen) abgezählt werden. In jedem Falle hat eine solche **Folge** ein erstes Glied, dann ein nächstes, ein übernächstes und so fort, so dass sie zu ordnen (etwa mit Hilfe von Ordinalzahlen wie 1., 2., 3., 4., und so fort) darauf hinausläuft, sie zu zählen (Kaplan, S. 298). Wir können mit Hilfe der natürlichen Zahlen die Anzahl der Elemente einer beliebigen begrenzten Menge feststellen, indem wir diese Elemente abzählen, d. h. sie nacheinander den ihrerseits aufeinander folgenden natürlichen Zahlen zuordnen, bis kein Element der Menge mehr ungezählt, also mit den aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ungepaart geblieben ist. Mit dem letzten Element der Menge ist dementsprechend der dann letzte Nachfolger aus der lücken- und wiederholungsfreien Folge der natürlichen Zahlen erreicht, der mit seinem Zahlenwert die Anzahl der Element der Menge anzeigt.

Wie Mengen gezählt werden, wird verständlicher, wenn wir uns mit den Kartoffeln in einem Kartoffelsack befassen. Man kann sie zählen, indem man eine Kartoffel nach der anderen aus dem Sack herausnimmt und nach Zuweisung der gerade erreichten Zählzahl weglegt. Dabei kommen natürlicherweise die oben im Sack, nahe an seiner Öffnung befindlichen Kartoffeln als erste dran. Sie sind aber nicht schon vorweg nummeriert, ihre Reihenfolge beim Gezähltwerden ist nicht vorbestimmt, sondern ergibt sich erst aus den Zufälligkeiten des Zählvorgangs. Man könnte nämlich schon vorweg alle Kartoffeln aus dem Sack auf den leer gefegten Boden schütten, alle auf einen Haufen, bevor man sie zu zählen anfängt, und wenn das geschieht, sollte jede gezählte Kartoffel nicht zurück auf den Haufen, sondern am besten in einen großen, bislang leeren Korb geworfen werden. Beim Abzählen aus dem Kartoffelhaufen haben die zuvor im Sack untersten Kartoffeln die größere Chance, zuerst gegriffen und gezählt zu werden, falls sie nach dem Ausschütten oben auf dem Kartoffelhaufen zu liegen kamen. Dann werden also die bislang Letzten die nunmehr Ersten sein, und die bislang Ersten werden zu den nunmehr Letzten, weil sie jetzt zu unterst auf dem Boden liegen (falls sie nicht fortgerollt sind). Man kann eine begrenzte Menge Kartoffeln also in beliebiger Folge abzählen, und kommt, bei sorgsamem Zählen, in jedem Falle zum gleichen Endergebnis, zur Anzahl dieser Kartoffeln. So könnte man eine weitere gewichtige religiös-theologische Aussage paraphrasieren und sagen: Vor dem Zählenden sind alle Kartoffeln gleich (falls es überhaupt Kartoffeln sind). Und so ist es bei den meisten Mengen, wenn es nur um die Anzahl ihrer Elemente geht. Übrigens: man kann einen Kartoffelsack auch – zugebunden – auf eine Waage stellen und einfach abwiegen.

**Was** alles kann von uns gezählt werden? Ganz einfach ist es, Äpfel zu zählen, die in einer Schale liegen. Vielleicht reichen zum Zählen die zehn Finger der beiden Hände aus, bei Birnen gleichermaßen. Man braucht aber diese beiden Arten von Zählobjekten nicht streng zu unterscheiden, sondern kann sie auch gemeinsam als „Früchte“ zusammenzählen. Ähnlich ist es mit den 7 Kräutern der „Grünen Soße“, es sollten zwar mindestens 7 sein, aber wenn keine Kresse zu haben ist, kann man sich auch mit Dill behelfen. Wenn man vor einer Reise seine „Sieben Sachen“ zusammensucht, um sie im Handkoffer zu verstauen, dann könnten das Folgende sein: Unterhemd, Unterhose, Nachthemd, Socken, Oberhemd, Zahnbürste, Gastgeschenk. Fehlt da noch etwas? Sechs Personen finden an unserem Tisch Platz, und es könnten darunter alte und junge, männliche und weibliche, Verwandte, Freunde, Gäste und auch ganz fremde Leute sein. Im Vorgriff auf spätere Diskussionen will ich hier schon fragen: Kann man auf diese Weise auch Zahlen zählen? Ja sicher, z. B. Lottozahlen, es sind 6 von 49, und noch eine Zusatzzahl, jedenfalls in dem bei uns üblich gewordenen System. Von Woche zu Woche könnten es andere 6 (7) Zahlen sein, Wiederholungen sind selten. Es könnten aber auch 10 von 100 sein, wenn ein größerer Lottoschein eingeführt würde. Astronomen haben sogar schon plausible Schätzungen der Anzahl der Sterne im Weltall vorgenommen, wobei nur das Problem zu meistern war, die richtig kugeligen und leuchtenden Sterne von all den Nebeln, Gaswolken und im All treibenden Trümmerhaufen explodierter Sterne zu unterscheiden. Deshalb zählt man heutzutage nicht mehr die Sterne, einen nach dem anderen, sondern versucht die Gesamtmasse der baryonischen Materie im Weltall einzuschätzen (vergleichbar mit dem Sack Kartoffeln mitsamt einiger Ackererde auf der Waage), und kommt dabei, je nach Maßeinheit, auf noch größere Zahlen, die nur in mehrstelligen Zehnerpotenzen ausgedrückt werden können.

Neben der Art der zu zählenden Etwasse kann auch deren Ähnlichkeitsgrad innerhalb derselben Art beim Zählen von Belang sein. Es können z. B. **identische** Etwasse sein, nämlich ein und dasselbe Objekt immer noch einmal gezählt, etwa die Sonne an jedem weiteren Tag, oder moderner: die Schwingungen einer Welle pro Zeiteinheit. Es können in bestimmter Hinsicht **gleiche** Etwasse sein, etwa nur Birnen, aber keine Äpfel; es können ziemlich **ähnliche** sein, etwa verschiedenartiges Obst, aber immerhin allesamt Früchte, und es können **völlig verschiedene** Etwasse aufgezählt werden, von welcher Art auch immer.

**Wie** kann das Zählen im einzelnen bewerkstelligt werden? Während man bei den gerade aufgezählten Etwassen mit den zehn Fingern der beiden Hände auskam, braucht man bei größeren Anzahlen andere Zählmittel. Derart größere Mengen beachtete man im Altertum nur bei so wichtigen Dingen wie gerade geerbten oder geraubten Herden, bei wertvoller Kriegsbeute, zu versklavenden Kriegsgefangenen oder getöteten Feinden bzw. ihren

Vorhäuten, die man müheloser dem Kriegsherrn demonstrieren und vor ihm abzählen konnte, so im Alten Testament (siehe 1 Samuel 18, 25-27). Das Zählen geschah wohl schon damals mit Hilfe von Strichlisten, etwa in Vierergruppen mit jeweils abschließendem Querstrich, wie es noch heute der Gefangene in seiner Zelle tut, wenn er an der Wand die inzwischen verflossenen Tage registriert, jedenfalls in der Karikatur. Etwasse, die zumindest in einem Merkmal gleich sind, kann man zählen, indem man sie mit den Ordinalzahlen in deren Reihenfolge versieht: Der erste Apfel, der zweite Apfel, der dritte Apfel, der vierte Apfel, der fünfte Apfel, und bis dahin sind es fünf Äpfel. Etwasse lassen sich leichter abzählen, wenn sie schon in einer Reihe neben- oder nacheinander angeordnet sind, z. B. Personen in einer Schlange vor einem Schalter. Jedes Etwas kann dann mit einer fortlaufenden Nummer, einer Ordnungszahl versehen werden, und dies bis jeweils zu der Ordinalzahl, die beim Zählen gleicher Etwasse am (vorläufigen) Ende einer Reihe erreicht wurde: so viele gleichartige Dinge (bzw. Wörter, Zahlen, etc.) sind es bis dahin!

Wenn nun beliebig Verschiedenes zusammengezählt wird (das könnte ja jemand mal ausprobieren wollen), z. B. als erstes eine Frucht, als zweites ein Löffel, als drittes ein Personenname, als viertes eine Primzahl, usw., dann lässt sich das jeweils festgestellte (Zwischen-)Ergebnis des Zählens nur noch vage auf „Etwasse" beziehen. Die so verschiedenen Etwasse entziehen sich nämlich einer Gesamtbetrachtung, man kann sie sich kaum noch vorstellen, und so bleiben als vergleichbar nur noch die Ziffern der von aller Anschaulichkeit abstrahierten „reinen" Reihe der Ordinalzahlen (1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8., 9., ....) übrig. Man kann dann auch ohne Etwasse feststellen, wie weit man beim Zählen gekommen ist, vielleicht bis zur 113ten Zahl: das ist dann die 113, eine der natürlichen Zahlen. Wenn also das zu Zählende (die Eigenart oder Verschiedenheit der Etwasse) vollends irrelevant geworden ist, und somit die Ordinalzahlen ihrer Funktion als Zählzahlen enthoben sind, können diese selber schließlich auf die Folge der **natürlichen Zahlen** reduziert werden: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, .... 113, 114, ... und so weiter. Mit usw. ist aber nur ausgesagt, dass es nach jeder Zahl eine nächste Zahl gibt, immer wieder, und dadurch immer mehr Zahlen, aber niemals so etwas wie „alle Zahlen"! Wer verallgemeinern will, kann dies bestenfalls mit der Formulierung „jede natürliche Zahl" oder umgangssprachlich „die Zahlen".

### 4.6.3. Das Zählen von Zahlen

Ganz anders als bei dem Auszählen der Mengen von Dingen ist es mit dem **Zählen von Zahlen** in **Zahlenfolgen:** von natürlichen Zahlen, ungeraden und geraden, mit einem konstanten Zahlenwert addierten (Summen), mit einem Faktor multiplizierten (Produkte), dividierten Zahlen (Brüche), von Dezimalzahlen (mit beliebig vielen Stellen nach dem Komma), von Zahlenpotenzen, von Primzahlen. Auch bei diesen ist immer die folgende Zahl zumindest größer als die ihr vorausgegangene, wenn auch im Verlauf der Primzahlenfolge mit immer größeren, teilweise extrem großen Abständen zwischen ihnen zu rechnen ist. Alle diese Zahlenarten sind schon vorgeordnet, nämlich nach einem schon von ihrem Anfang an geltenden je spezifischen Prinzip konstruiert, und außerdem sind ihre Folgen jeweils unendbar: Es gibt keinen Sack oder Korb, auch keinen theoretischen, in den „alle" Zahlen einer solchen Folge hineinpassen, nicht einmal Gottes Himmelszelt reicht dafür, weil sie gar keine begrenzte und insofern durch Zählen feststellbare Anzahl haben.

Für einen Mathematiker ist die Zahl 3.726 zwar nur minimal, aber immerhin um den Wert „1" größer als die Zahl 3.725, und sie ist ganz eindeutig um genau diesen Wert größer. Die

Differenz zwischen beiden Zahlen beträgt exakt 1, nicht mehr, aber auch nicht weniger. Dagegen ist es bei zwei Säcken mit ebenso vielen (3.726 bzw. 3.725) Maiskörnern schon recht schwierig, irrtumsfrei festzustellen, in welchem der beiden Säcke ein Maiskorn mehr enthalten ist; es könnten sogar noch ein paar weitere Körner dazugekommen sein oder aber fehlen. Im Unterschied dazu ist bei Zahlen selbst ein ganz minimales Größersein nicht mit (nur statistisch zu bewältigenden) Messfehlern behaftet. Wenn bei einer 20stelligen Zahl ihre Nachfolgerzahl um genau den Wert 1 größer ist, z. B. wenn auf die Zahl 20.152.783.941.208.473.965 gleich darauf die Zahl 20.152.783.941.208.473.966 folgt, dann gibt es kein Verzählen, weil die unmittelbare Nachfolge sich eindeutig aus der Konstruktion der Folge der natürlichen Zahlen ergibt. Es folgt genau diese Zahl und keine andere. Große Mengen wiederum sind in ihrer Größe nur ungefähr einzuschätzen; es könnten bei einer noch so genauen Schätzung großer Mengen doch immer noch ein paar Elemente mehr oder ein paar Elemente weniger sein. Im Grunde interessiert bei Mengen die genaue Anzahl ihrer Elemente weniger als deren Eingeschlossensein in die Menge, die Zugehörigkeit zu ihr. Dieser Aspekt soll im folgenden Abschnitt näher erläutert werden.

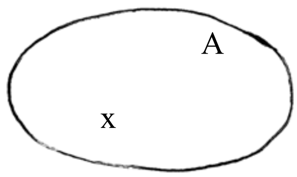
### 4.6.4. Vor-numerische Grundlagen der Mengenlehre

Weil schon mehrfach alltagssprachlich von Mengen die Rede war, soll im Folgenden der mathematische Mengenbegriff zunächst verdeutlicht und dann eingehend diskutiert werden. Die Mengenlehre ist eine mathematische Theorie, die sich mit den Eigenschaften von Mengen und mit den Beziehungen zwischen Mengen befasst. Nach G. Cantor, dem Begründer der Mengenlehre, ist die Menge eine Zusammensetzung von je bestimmten Objekten der Anschauung oder des Denkens zu einem Ganzen. Die Prozedur des Zusammenfassens gleichartiger Elemente kann als Komprehension bezeichnet werden. Der „naiven“ Mengenlehre liegt die auf Cantor zurückgehende Definition von Menge zugrunde. Für praktische Zwecke hat sich der naive Mengenbegriff als durchaus hinreichend erwiesen.

Im Folgenden werde ich zwar die in der Mengentheorie übliche Sprech- und Schreibweise verwenden, dabei aber schon der Frage nachgehen, was unter „Menge“ genauer verstanden werden kann. Grundbegriffe axiomatischer Theorien der Mengenlehre sind >Menge< und >Element<, oft auch >Klasse<. Die wichtigste Relation ist >∈<, gesprochen: „ ... ist Element von ...“ oder „ ... ist enthalten in ...“, z. B. $x \in A$ (x ist Element von A).

Zur Veranschaulichung von Mengen werden diese gemeinhin graphisch als Kreise oder jedenfalls als Sphäroide (kreisähnliche Formen) dargestellt:

Element x
in einer Menge A:



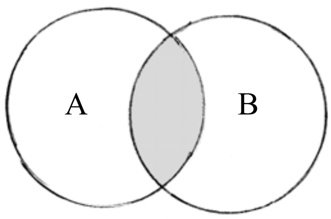

Diese Veranschaulichung erweckt den Anschein, dass die Menge so etwas wie eine (Hohl)-Kugel oder ein dreidimensionales Sphäroid sei, nur an der Wandtafel oder auf dem Blatt Papier als ein Kreis dargestellt, weil dieser auf einer 2-dimensionalen Fläche leichter zu zeichnen ist als eine Hohlkugel. Und im Inneren dieser Kugel seien die Elemente „enthalten“. Dem entspricht auch eine der Grunddefinitionen der Mengenlehre:

„Die leere Menge Ø ist die Menge, die kein Element **enthält“.**

Ist demnach die Menge ein Behälter für Elemente, der mehr oder weniger voll oder auch leer sein kann? Ist das Enthaltensein (in welchem Behälter auch immer) das allgemeinste Merkmal eines Elements? Eine bestimmte Menge „enthält“ aber nur Elemente einer bestimmten Art, die sich nämlich in einer bestimmten Hinsicht gleichen, die quasi mit Etiketten versehen sind oder versehen werden und danach eingeordnet werden könnten, ähnlich wie etikettierte Weinflaschen im Großkeller in je verschiedenen (gleichermaßen unterschiedlich etikettierten) Flaschenregalen einsortiert werden und dort ihren Platz haben, wo man sie leicht wiederfinden kann.

Es ist aber zu beachten, dass ein Element (ein und dasselbe Element!) verschiedenen Mengen angehören kann, nämlich wenn es unterschiedliche Merkmale aufweist:

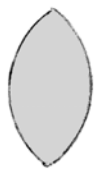
Definition: $A \cap B$




= **Durchschnitt** der Mengen A und B

= die Menge aller Elemente, die sowohl Element von A als auch von B sind.

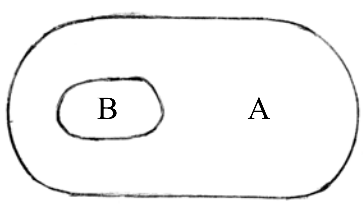
Zu bedenken ist: im gemeinsamen Bereich



kommen die Elemente **nicht** in doppelter Dichte vor! Vielmehr sind es dieselben Elemente, die **sowohl** A zugehören (in **einer** Hinsicht), **als auch** B zugehören (in einer **anderen** Hinsicht).

Ähnliches gilt für die folgende Definition:

$B \subset A$



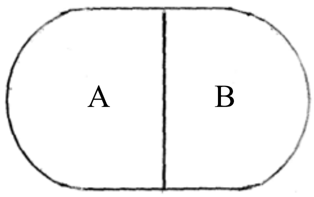

= B ist **Teil**menge von A

Das heißt: alle Elemente von B sind auch solche von A (und es sind wiederum dieselben Elemente, die zugleich in A und in B sind, und keineswegs im inneren Kreis doppelt so viele!).

Als Zwischenergebnis ist festzuhalten: ein und dasselbe Element kann zwei (oder mehreren) Mengen zugehören.

Etwas anders ist es bei der folgenden Definition:

$A \cup B$




= **Vereinigung** der Mengen A und B

= die Menge der Elemente, die in A **oder** in B liegen (liegen sie wirklich drin?).

Und schließlich:
A $\sim$ B: sie sind **gleichmächtig (äquivalent)**, wenn es eine bijektive Abbildung von A auf B gibt. Auf diese Aussage werden wir noch zurückkommen.

Eine aus diesen Grundlagen präzisierte, auf Axiomen aufbauende Mengentheorie bildet heute anerkanntermaßen die Grundlage für fast alle mathematischen Spezialdisziplinen. Sie ermöglicht es, einen einheitlichen Aufbau der Mathematik auf der Basis einiger weniger Grundprinzipien durchzuführen. Viele Disziplinen wie etwa die Topologie, die Maßtheorie und die abstrakte Algebra sind ohne Mengentheorie kaum vorstellbar.

### 4.6.5. Meta-mathematische Analyse einiger Grundbegriffe der Mengenlehre

Noch bevor wir uns kritisch mit den unendlichen „Mächtigkeiten“ der Mengenlehre befassen, sollten wir die bisher verwendeten Grundbegriffe der Mengenlehre gründlicher diskutieren, damit klarer wird, was eigentlich gemeint ist, wenn beispielsweise von „Elementen“ einer „Menge“ die Rede ist. Beginnen wir unsere meta-mathematische Begriffsanalyse mit dem Wort „**Element**“, wohlgemerkt: zunächst nur mit diesem **Wort**, noch **nicht** mit seiner Verwendung als mathematischer **Begriff**. Unter Elementen versteht man seit alters her, schon bei den griechischen Vorsokratikern, die Grundbestandteile der Materie wie etwa das Erdige, das Wasser, die Luft und das Feuer, oder auch materielle Ur-Gegebenheiten wie die Atome, die nicht mehr weiter zerlegt werden können. Diese Bedeutung hat sich in der Chemie bis heute erhalten: das Element Wasserstoff ist chemisch nicht weiter zerlegbar, nur noch kernphysikalisch, nämlich in ein positiv geladenes Proton und ein negativ geladenes Elektron, die miteinander eine feste Verbindung eingehen und in der Regel beibehalten..

In der Mengenlehre könnten dagegen als Elemente einer Menge auch erwachsene Menschen fungieren, die man den Teilmengen entweder der Männer oder der Frauen zuordnen kann. Ein Mensch ist aber alles andere als ein Element im gerade besprochenen Sinne: er ist hochkomplex, aus den verschiedensten chemischen Elementen und (auf einer höheren Ebene) aus Organsystemen zusammengesetzt. Aber selbst wenn er im Einzelfall ziemlich einfältig sein sollte, kann man ihn in die verschiedensten Klassen, Gruppen, Gemeinschaften, Völker etc. einordnen, unter verschiedene Oberbegriffe subsumieren (als Lebewesen, Vielzeller, Tier, Wirbeltier, Säugetier, Primat, Anthropoid, Homo sapiens), auch in Mengen kann er enthalten sein. Als „Element“? Das würde höchstens für die „kriminellen Elemente“ gelten, aber auch diese verdienen eine bessere Bezeichnung.

Ganz im Unterschied zum hochkomplexen Menschen kann das Wort „Element“ (einer Menge) auch für eine natürliche Zahl (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ...) verwendet werden. Diese könnte wiederum den Mengen entweder der geraden oder der ungeraden Zahlen zugeordnet werden, oder den Primzahlen, einer Teilmenge der ungeraden Zahlen. Auch das hat mit Elementen im bisher üblichen Sinne nichts zu tun.

Passender sowohl für Menschen als auch für Zahlen wäre die im Vergleich zu „Element“ noch allgemeinere Bezeichnung „Etwas“. Da es aber um plurale Mengen von „Etwassen“ geht, sollte man die sperrige Bezeichnung „Etwas“ durch das gleichbedeutende und auch international verständlichere lateinische Wort „quid“ ersetzen. Als Kunstwort einer heutigen Fachsprache könnte man es in der Verwendung als Plural mit dem englischen Plural-s versehen und von „Quids“ sprechen, die in einer Menge enthalten sind. Ich kann die Wortwahl noch etwas präziser begründen: das lateinische Wort „quid“, deutsch „(irgend)etwas“, was auch immer, ist ein Indefinit-Pronomen (ein unbestimmtes Fürwort); es wird verwendet zu einer nur allgemeinen Nennung irgendeiner Sache ohne genaueren Hinweis auf sie, es ist eben etwas, was es gibt (siehe in meiner Website „Über Vieles im Ganzen“ unter 2.3.3.1.), ein irgendwie Seiendes. Es gab im Lateinischen auch die erweiterte Form „**ali**quid“, die noch spezieller auf „irgendetwas **anderes“** hinweist. Für unsere Zwecke passender ist das einfache „quid“, das sich als ein einzelnes Etwas in eine Auswahl gleichartiger quids einordnen lässt.

Quids können sich in zumindest einer Hinsicht gleichen und sich von anderen quids, die in dieser Hinsicht anders sind, unterscheiden. Dasjenige, worin sich verschiedene quids gleichen, nennen wir ihr **Merkmal** (bei Menschen spricht man von Eigenschaften). „Gleichartig“ heißt also, dass diesen quids das gleiche Merkmal zugeschrieben werden kann. Für „Merkmal“ könnte ich in Analogie zum quid einfach „qual“ schreiben und auch dies ggf. mit dem Plural-s versehen. Das Kunstwort „qual“ ist abgeleitet von lateinisch „qualis“ (interrogativ: „was für einer?“, relativ: „welcherlei“) und dem philosophischen Begriff „Qualia“ (Eigenschaften, Merkmale, das Sosein von Etwas). Mit einer für Deutsche nachfühlbaren quälenden Qual sollte es nichts zu tun haben.

(Ich will hier nur kurz darauf hinweisen, dass ich in meinem Beitrag über „Epistemologische Voraussetzungen: Unterschiedliche Weisen der Existenzerfahrung“ (Abschnitt 2.3.3.1.) ganz verschiedenartige Gegebenheiten aufgezählt habe als Antwort auf die Frage, „was es alles gibt“. Derartige **Gegebenheiten** sind eng beziehbar auf den gerade verwendeten Begriff „Etwas“ oder „quid“. In ihren verschiedenen Arten sind sie natürlich gleichermaßen abhängig davon, welche charakteristischen Merkmale sie als je besondere Hinsicht auf Seiendes erscheinen lassen. Doch zurück zum eben unterbrochenen Gedankengang.)

Demnach könnte die Aussage $x \in A$ („x ist ein Element der Menge A“) als abkürzende Formel verstanden werden für den Fall, dass ein Etwas (= ein quid) ein Merkmal (etwa ein $\text{qual}_A$) hat, durch das es mit allen weiteren quids, die mit dem gleichen qual versehen und insofern gleichartig sind, ausgewählt werden und zu einer Menge A zusammengefasst werden kann.

Eine solche Gleichartigkeit kann auf **ein** Merkmal beschränkt sein, aber auch in mehr als einem Merkmal bestehen. So sind Primzahlen immer auch ungerade Zahlen, aber ungerade Zahlen sind nur ausnahmsweise Primzahlen. Bei Zahlen sind die Verhältnisse noch vergleichsweise einfach. Bei Menschen dagegen gibt es eine Unzahl möglicher Merkmale, die empirisch mit Faktorenanalysen in eine einfachere Ordnung („simple structure“) gebracht werden können.

Das verschiedenen quids gemeinsame qual macht es möglich, dass die quids nach diesem qual ausgewählt (selegiert) und in eine übergreifende Menge einsortiert werden können. Wohlgemerkt: nicht die Merkmale selbst werden einsortiert, sondern die in Hinsicht auf die Merkmale gleichartigen quids, die ggf. auch gleichartig sind in Hinsicht auf mehrere unterschiedliche und dennoch ihnen gemeinsame Merkmale. Und ganz andere Merkmale lassen wiederum andere Einordnungen zu, was auch immer das sein mag, in das sie eingeordnet werden. Cantor nannte es Menge, wir könnten es auch „Speicher“ nennen (auf englisch: „store“). Ein einzelnes quid kann, wenn es verschiedene Merkmale hat, in verschiedenen Stores gespeichert werden und in ihnen gespeichert bleiben. Das ist bemerkenswert, denn von den realen Dingen unserer Wirklichkeit heißt es, dass **ein und dasselbe** Ding **nicht gleichzeitig** an zwei verschiedenen Orten sein oder gar in zwei verschiedenen Behältern enthalten sein kann.

Es stellt sich deshalb die Frage, ob „Speicher“ das richtige Wort zur Kennzeichnung des eigentlich Gemeinten ist. Es ist aus dem spätlateinischen spicarium „Getreidespeicher“ entlehnt (zu lat. spica „Ähre“), und hat von daher noch die Bedeutung „Dachboden, Vorrats- oder Lager-Raum“. In der uns vertrauten Landwirtschaft könnte aber ein und dasselbe Korn nicht gleichzeitig in verschiedenen Kornspeichern sein, noch nicht einmal in zwei verschiedenen Säcken. In der Mengentheorie ist das ganz anders, und auch in der Festplatte des Computers herrschen ganz andere Verhältnisse. Vielleicht lohnt es sich, diesem so unterschiedlichen Sprachgebrauch in einer Zwischenbetrachtung nachzugehen.

Neben den Kornspeichern und den (meist zugebundenen) Kartoffelsäcken gibt es Speicher von ganz anderer Art, etwa für Flüssigkeiten, nämlich Gefäße, darunter offene Wannen und Becher und verschließbare Fässer und Flaschen. Es gibt darüber hinaus Speicher für alle möglichen Dinge, die man dann „Behälter“ nennt, die wiederum offen oder geschlossen, leer bzw. mehr oder weniger voll sein können. Es gibt sogar einen Speicher für alles, was es gibt: das All, den Kosmos, das endliche Universum, bzw. der unendliche (besser: unendbare) Raum. Die Speicher unserer Computer haben sich von solchen „Behältern“ weit entfernt. Sie speichern Bits, die in ihrer Abfolge wiederum als alles Mögliche lesbar sind, universell verwendbar: für Zahlen, Buchstaben, Zeichen, Worte, Graphiken, Bilder, alles in einer Festplatte. Ist die Festplatte etwa ihr Behälter? Das sehen die Computer-Fachleute anders. Ein exzellenter Speicher (mit vielen Unterspeichern) ist das Gehirn des Menschen. In ihm können alle möglichen, alle denkbaren quids ihren eigenen, manchmal sogar übersichtlichen und gut auffindbaren Platz finden, ohne sich im mindesten zu drängeln. Das Gehirn, insbesondere die Großhirnrinde im Verbund mit einigen an der Speicherung beteiligten zentraleren Kernen, eben alles, was zum Funktionieren des Gedächtnis (oder der Merkfähigkeit = memory) beiträgt, ist aber alles andere als ein „Behälter“. Es „enthält“ nicht die Dinge etc. selbst, sondern speichert die Information über sie, und über die Welt der Dinge hinausgehend über alles Denkbare, also über alle Arten von quids, und über alle ihre quals, ihre Eigenschaften und Merkmale, insgesamt über alles, was wert ist, an ihnen bemerkt und über sie gemerkt zu werden.

Was ist nun der Unterschied zwischen „enthalten“ und „speichern“? „Enthalten“ bedeutet, dass in einen „Behälter“ etwas als Entität, so wie es ist, hineingekommen und im Behälter irgendwo drin geblieben ist, ggf. in allendlicher Menge. „Gespeichert“ (in einem moderneren Sinn verstanden) bedeutet dagegen, dass etwas (ein quid) in eine für die Speicherung geeignete Sprache übersetzt, in dieser Form aufgenommen und jederzeit reproduzierbar, vergleichbar und zählbar ist. Das Gespeicherte ist aber weiterhin veränderbar, bearbeitbar, korrigierbar, verwandelbar, auf „unendbare“ Weise, und es ist sogar löschbar und vergessbar.

Verzeihen Sie mir diese Neuprägung, und versuchen Sie bitte nicht, „vergessbar“ als irgendwie „verdrängt“ zu verstehen. Denn etwas zu vergessen, wenn es endlich erledigt ist, kann auch eine konstruktive Leistung sein. Weg mit dem Spam! Ab in den „Papierkorb“! Und auch dort schließlich endgültig gelöscht!

Ist nun „die Menge“ nun so etwas wie ein **Behälter** für Elemente oder doch eher ein **Etikett** für ihre je besondere gleichartige Qualität? Eine eingehendere Diskussion dieser beiden einander inhaltlich ergänzenden und zugleich korrigierenden Benennungen könnte uns vor Fehleinschätzungen des eigentlich Gemeinten bewahren. Zunächst zum Zusammenhang zwischen den beiden zur Frage stehenden Begriffen: das bestimmte Merkmal dient nach der Etikettierung des quid auch zur Etikettierung des für ihn spezifischen Speichers. **Ein** einzelnes quid kann, wenn es mit verschiedenartigen quals etikettiert ist, in verschiedenen Speichern gespeichert sein und gespeichert bleiben. Der Speicher$_A$ ist Speicher für quids mit dem Merkmal qual$_A$. Die Merkmale also sind es, die den Zusammenhang stiften (als „link“ fungieren) zwischen den gleichartigen quids und dann auch mit dem ihnen zugeordneten Speicher.

So könnten wir alle quids, denen ein bestimmtes qual zukommt, danach auswählen und in einen Speicher (engl. store) einordnen, alle ohne Ausnahme. Wie viele das dann sind, steht zunächst gar nicht zur Diskussion, obwohl der Mathematiker G. Cantor sich eine lange Zeit seines Lebens abgemüht hat, verschieden große Unendlichkeiten („Mächtigkeiten“) von Mengen zu unterscheiden. Schließlich gibt es für all und jedes die „Mengen“ der Mengentheorie, die jeweils für gleichartige Etwasse (quids) welcher Art auch immer verwendbar und mathematisch maximal formalisiert sind.

An all dem bis jetzt Diskutierten ist aber mengentheoretisch nur wichtig, dass die Menge nicht so sehr ein Behälter oder allgemeiner ein Speicher ist, sondern dass es um die **Zuordenbarkeit** von quids an Hand ihrer quals zu einer Gesamtheit von welcher Art auch immer geht. Besser als das deutsche Wort „Menge“ (engl. a lot of), was eher auf eine große Anzahl (Vielheit, Fülle) von Etwassen hinzielt, wird das in der Mengenlehre damit eigentlich Gemeinte durch das englische Wort „**set**“ (deutsch: Zusammengehöriges) zum Ausdruck gebracht. So wird die „Mengenlehre“ im Englischen sehr treffend als „set theory“ bezeichnet, und von einem „Set“ zusammenpassender Tassen, Teller und Bestecke (die können auf bloß 6 oder 12 beschränkt sein) sprechen wir auch im Deutschen. Auch das französische Wort „ensemble“ (deutsch: Zusammenstellung, auch von Künstlern eines Theaters) trifft das Gemeinte gut, und als ein „Ensemble“ einzelner gut zueinander passender Kleidungsstücke ist das Wort auch für Deutsche gut verständlich, wenn auch schwieriger auszusprechen. Das französische Wort „ensemble“ ist übrigens über lateinisch in-simul (zusammen, miteinander) von lateinisch simul (**gleich**zeitig) und similis (ähnlich) abgeleitet. In all diesen Varianten geht es um die Zugehörigkeit (engl. belonging) von gleichartigen quids (mit gleichem qual) zum Zusammengehörigen (engl. set). Die Anzahl der quids ist dabei unerheblich, denn auch Paare sind Mengen, wenn auch recht kleine.

Wir haben schon gesehen, dass es für ein und dasselbe quid die Möglichkeit **mehrerer** Zugehörigkeiten gibt, also der Zuordnung zu verschiedenen Sets. So kann ein Mann Ehegatte sein, aber auch Vater eines Kindes, Familienangehöriger, Verwandter, Angehöriger einer Sippe, eines Stammes, einer Dialekt- oder Sprachgemeinschaft, einer Nation, einer Religion oder Sekte, einer Partei, aber auch ein Steuerzahler, Beamter, Pensionär, Bonsai-Züchter, Dilettant, Liebhaber, Chorsänger, schließlich kann er (außerberuflich) ein Philosoph und entschiedener Pluralist sein. Solche unterschiedlichen Zugehörigkeiten können ihn in Entscheidungsschwierigkeiten oder sogar Loyalitätskonflikte bringen: Sollte er seine Familie seinem Beruf aufopfern oder gar seiner Religion? Wie sagte doch die kleine Alice zur Schachkönigin, als diese sie zu überfordern versuchte? „Ich möchte bitte lieber nicht!“ (Lewis Carroll: Alice hinter den Spiegeln. Insel TB, 1974, S. 39).

Nach diesen meta-mathematischen sprachlichen Vorklärungen, in denen ich das Wort „Elemente“ durch „quids“ und die „Menge“ durch „Set“ ersetzt und verdeutlichend noch den Begriff „qual“ eingeführt und die Menge als Set von Elementen (quids) mit gleichen Merkmalen (quals) definiert habe, will ich dieses Ergebnis meiner Überlegungen im nächsten Abschnitt auf einige weitere Probleme der Mengentheorie anwenden.

Mir fiel übrigens nachträglich auf, dass Etwasse (z. B. Gegenstände) und ihre Merkmale (Eigenschaften) ja schon die Hauptbegriffe einer Theorie der Mathematiker Ganther und Wille in ihrer Abhandlung „Formale Begriffsanalyse“ waren, mit der ich mich im Zusammenhang mit einer Analyse von Daten des „Weltatlas der Sprachstrukturen“ (WALS) eingehender beschäftigt habe. Auch der Ganthersche „Begriff“ umgreift Gegenstände, die durch gleichartige Merkmale als zusammengehörig „begriffen“ werden, so dass dieser Begriff einem „set“ vergleichbar ist. Die Autoren setzen verschiedene Gegenstände und verschiedene Merkmale über eine Matrix miteinander in Beziehung. Diese Beziehung zwischen verschiedenen (ggf. mehreren) Gegenständen, auf Zeilen untereinander aufgeführt, und verschiedenen (ggf. mehreren) Merkmalen, auf Spalten nebeneinander, kann zu einem Begriff verdichtet werden. So könnte etwa die Kombination von verschiedenen Sprachen mit verschiedenen Eigentümlichkeiten der Sprachstruktur erlauben, diese Sprachen als „indoeuropäisch“ zu kennzeichnen, was seinerseits zu einer ersten Definition des Begriffs „indoeuropäisch“ dienen könnte. Diesen Fragen werde ich unter dem vorläufigen Titel „Altsprachen“ in einer Abhandlung nachgehen, die nach ihrer Fertigstellung in meine Website aufgenommen werden soll.

## Das Zählen von Elementen einer Menge von Etwassen (Quids)

Bevor ich im nächsten Abschnitt auf die Cantorschen Weiterungen der Mengenlehre zu sprechen komme, möchte ich versuchen, mit eigenen Überlegungen, die aus den vorigen Abschnitten resultieren, eine Diskussionsgrundlage für das Folgende zu schaffen. Das soll in einer Abfolge von theoretischen Setzungen geschehen.

**Voraussetzungen:**
Es gibt die unendbare Folge der natürlichen Zahlen.
Etwasse (Quids) mit gleichen oder ähnlichen Qualitäten (Eigenschaften, Merkmalen, Quals) lassen sich zu Mengen (Sets) vereinigen.
Solche Mengen können von augenscheinlich relativ geringerer oder größerer Quantität sein.

**Bedingungen für das Zählen:**
Schon natürlicherweise können die Etwasse, eines neben oder nach dem anderen, in einer Reihe angeordnet sein, wie beispielsweise die fünf Finger einer Hand.
Wenn sie in ungeordneten Haufen vorliegen, können sie künstlich in eine Reihenfolge gebracht (linearisiert) werden, so wie Perlen auf einer Schnur zu einer Kette aufgereiht werden.
Wenn sie in Kontinuitäten eingebunden sind, können sie mittels vorgegebenen Maßen diskretisiert werden, etwa als Teile einer Strecke oder Momente eines Zeitablaufs.
Das Zählen der Elemente einer größeren ungeordneten, aber endlichen Menge kann am eindeutigsten mit Hilfe einer Art Schleuse bewerkstelligt werden, die immer nur **ein** Etwas

und dieses nur in **einer** Richtung durchlässt. Als Schleuse kann eine Hand dienen, die beispielsweise eine Kartoffel nach der anderen vom Kartoffelsack in einen Kartoffelkorb von etwa gleich großem Volumen befördert.

**Der Zählvorgang selbst:**
Bei solchem Durchschleusen werden den Elementen Schritt für Schritt (sukzessiv) die natürlichen Zahlen, mit der 1 angefangen, bijektiv zugeordnet, so dass die Zahlen dieser Folge quasi auf den linearisierten Elementen der abzuzählenden endlichen Menge abgerollt werden.

**Der Abschluss des Zählvorgangs:**
Das geschieht in ununterbrochener Doppelfolge bis zum faktisch letzten noch ungezählten Etwas, dieses eingeschlossen, und entsprechend bis zu der ihm zugeordneten natürlichen Zahl oder auch Ordinalzahl, und wird beendet mit dem gleichzeitigen „Stop“ der beiden Reihen.
Wegen der endlichen Menge der Etwasse findet auch die Zuordnung der an sich unendbaren Folge der natürlichen Zahlen ein Ende, nachdem alle Elemente der abzuzählenden Menge ohne Rest zählend „abgeräumt“ worden sind.

**Das Ergebnis des Zählvorgangs:**
Die beim Zählen letzte natürliche Zahl, als Ordnungszahl dem als letztes abgeräumten Element der Menge zugeordnet, gibt die Gesamtzahl ihrer Elemente an.

Da es keine endliche Gesamtzahl aller natürlichen Zahlen, aller geraden Zahlen, ungeraden Zahlen, Primzahlen, Vielfachen, Potenzen etc. gibt, nämlich nicht geben kann, kann man solche Zahlenfolgen nicht in gleicher Weise wie eben beschrieben als Gesamtmenge auszählen. Die natürlichen Zahlen in ihrer von Anfang an definierten Abfolge sind völlig indifferent gegenüber dem, was im Einzelnen ihnen bijektiv zugeordnet wird. Man könnte ihnen auch natürliche Zahlen – in gleicher Abfolge – zu zählen geben. Immerhin etwas plausibler wäre es, die natürlichen Zahlen mit Ordinalzahlen abzuzählen. Das geht sehr schnell: die 173592864te natürliche Zahl ist die 173592864! Überprüfen sie es, es stimmt!

Wenn man andere unendbare Zahlenfolgen abzählt, und jeweils – bei bijektiver Zuordnung! – bei der gleichen Ordinalzahl einen Stop macht, sind die Mengen der bis dahin abgezählten Zahlen der verschiedenen Zahlenfolgen immer gleich, unabhängig von der Größe der dabei erreichten Ordinalzahl, sogar wenn diese mächtig groß ist, und die verglichenen Zahlenmengen (wohlgemerkt: bis zur gleichen Ordinalzahl!) sind somit gleichmächtig. Das kann man schon Oberschülern verständlich machen.

Die Gleichmächtigkeit (bis zum Stop) sagt im Grunde nur aus, dass sie überhaupt gezählt werden können, wie übrigens alles, was man der „Zählmaschine“ der Ordinalzahlen zuführt, so auch Kartoffeln, Reiskörner, die Sandkörner einer Düne, die Sterne des Himmels. Solange man die Mengen dieser verschiedenen Etwasse parallel (bijektiv) abzählt, hat man beim beliebigen Stop jeweils die gleiche Menge abgezählt. Um Sandkörner und Sterne parallel zu zählen, braucht man viel Zeit. Besser wäre es, ihre Gesamtmengen je für sich in ihrer Verschiedenheit abzuschätzen, denn dann käme man auf unterschiedlich große Mengen: so sind Kartoffeln bzw. Reiskörner viel seltener als Sandkörner, und große Diamanten über 100 Karat sind noch viel seltener, einige davon sind namentlich bekannt. Die übrigen kleineren Diamanten könnte man bis zu größeren Mengen abzählen. Bei den kleinsten Diamanten geht es schneller, ihr Gesamtgewicht mit der Waage festzustellen, und in Kenntnis ihres durchschnittlichen Gewichts davon ihre Gesamtzahl abzuleiten.

### 4.6.6. Zahlen-Mengen?

Im Folgenden werde ich die Überlegungen über Folgen und über Mengen in einen engeren Zusammenhang bringen, nämlich mit der von G. Cantor aufgeworfenen Frage, ob und ggf. wie mathematisch korrekte Aussagen gemacht werden können über die „Mächtigkeiten" verschiedener Zahlenfolgen, quasi über die Gesamtmengen der jeweils in ihnen enthaltenen Zahlen. In seinen Versuchen, diese Frage zu beantworten, führte Cantor die bislang diskutierte ‚naive' Mengentheorie zu Weiterungen, denen zu folgen nicht nur die Verstehensmöglichkeiten von Schülern überforderte. Es war zunächst noch nicht zu verwundern, wenn dabei das intuitive Verstehenkönnen von Schülern an seine Grenzen stieß (Weigand, S. 132/132), etwa bei dem von Weigand (S. 128/129) wiedergegebenen Beispiel, mit dem er die Sachlage überzeugend demonstrieren konnte: ca. 70% von 10-16jährigen Schülern vertraten die Ansicht, dass die „Menge" der natürlichen Zahlen {1,2,3,4 ...} mehr Elemente enthält als die „Menge" der geraden Zahlen {2,4,6,8 ...}, offenbar genau doppelt so viel! Die von Cantor behauptete und mit einer von ihm entwickelten Methode begründete „Gleichmächtigkeit" dieser Mengen kann offenbar erst und nur über diese Methode „naiven" Schülern vermittelt werden, wenn überhaupt. Es erweist sich somit für Weigand, „dass der im potentiell unendlichen Sinn vermittelte Aufzählungsaspekt nicht zum Verständnis eines aktualen Unendlichkeitsbegriffs führt" (H. Sch.: führen kann!), jedenfalls nicht bei unverbildeten Kindern, und ich ergänze weiter: ... ähnlich wie im Märchen von „des Kaisers neuen Kleidern" nur ein Kind in der Lage war, „ganz naiv" festzustellen und auszurufen, „der Kaiser ist ja **nackt**!"

Mathematiker waren seit Jahrhunderten mit dem potentiell Unendlichen der Folgen vertraut. Die Grenze zum aktual Unendlichen von Cantorschen „Mächtigkeiten" der abzählbar bzw. überabzählbar unendlichen Mengen zu überschreiten, fiel auch hoch kompetenten Mathematikern schwer, und es wurde nicht leichter, wenn Cantor sich in Weiterungen seiner Theorie auf ein, wie er es nannte, „Eigentlich-Unendliches" stützte (1932, S. 165, S. 180, zitiert nach Weigand, S. 45). Gegen Cantors neuen Ansatz regte sich schon bald ein Widerstand, der in L. Kronecker einen einflussreichen Wortführer fand. Auch Hilbert (1926, zitiert nach Weigand, S. 45) kritisierte diesen Ansatz und strebte das Ziel an, „die Schlussweisen mit dem Unendlichen durch endliche Prozesse" (S. 162) zu ersetzen, da das Unendliche in der Wirklichkeit keine inhaltliche Bedeutung hat: „Das Unendliche findet sich nirgends realisiert; es ist weder in der Natur vorhanden, noch als Grundlage in unserem verstandesmäßigen Denken zulässig ...Das Operieren mit dem Unendlichen kann nur durch das Endliche gesichert werden ..." (S. 190). Vor allem Weierstrass verbannte unendliche Größen aus der Mathematik und ersetzte sie durch Prozesse, die mit dem (H. Sch.: unendbaren) Operieren im Endlichen auskommen (Weigand, S. 44). Auch die Intuitionisten mit L. E. J. Brouwer lehnten die Mengenlehre ab, und die Opposition vor allem von Seiten der Konstruktivisten gegen die Mengenlehre ist nie ganz verstummt. Sie richtete sich in erster Linie gegen Cantors Umgang mit verschiedenen Arten von Unendlichkeiten, die von ihm als „Mächtigkeiten" bezeichnet wurden. Darüber später mehr.

Man sollte solche und andere Kritik ernst nehmen, denn auch in anscheinend unangreifbaren Theoriekomplexen einer auf festem axiomatischen Grund aufgebauten Mathematik könnte noch ein Klärungsbedarf bestehen, zumindest in Hinsicht auf meta-mathematische Grundvoraussetzungen und orientiert am Ziel einer Verdeutlichung und ggf. Verbesserung ihrer Begriffe. Denn irreführende Benennungen sollten möglichst durch besser passende, das Gemeinte besser bezeichnende Wörter ersetzt werden. Das impliziert keineswegs automatisch, dass damit der eigentlich gemeinte Begriff in Frage gestellt wird, denn dieser könnte sich ja im logischen und insbesondere mathematischen Zusammenhang mit anderen

Begriffen bewährt haben und durch eine bessere Wortwahl nur noch weiter gefestigt werden. Die Korrektur der Fehlbenennung sollte also in einem konstruktiven Sinn geschehen, nämlich mit den Methoden der Analytischen Philosophie (vgl. Eike von Savigny: Die Philosophie der normalen Sprache. Suhrkamp, Frankfurt/M., 1969), der es u. a. darum geht, durch eine „Therapie“ der Sprechweisen zu einer Klärung philosophischer Fragen beizutragen (S. 327) und auch auf diese Weise das Grübeln über Scheinprobleme obsolet werden zu lassen (S. 345).

Wenden wir uns nun wieder den schwierigen Problemen zu, die aufkommen, wenn man versucht, Zahlen zu zählen. Kann man das überhaupt? Da ist zunächst zwischen zwei Möglichkeiten zu unterscheiden: 1. das Abzählen von Zahlen einer Zahlenfolge bis zur soundsovielten Zahl und 2. der Versuch, einen Gesamtvergleich der Mengen von Zahlen je verschiedener Zahlenreihen vorzunehmen. Das eine, Zahlen abzuzählen, und das andere, die Menge von Zahlen einer Zahlenreihe im Vergleich mit anderen Zahlenreihen abzuschätzen, ist jedoch, wie wir noch sehen werden, nicht dasselbe.

Ad 1: Man kann die Zahlen einer geordneten Folge, welcher auch immer, abzählen, angefangen mit der 1. Zahl, fortgesetzt mit der 2., der 3., usw., bis zu einer soundsovielten oder n. Zahl der Folge. So können auch natürliche Zahlen abgezählt werden, und zwar mit Hilfe der Ordinalzahlen. Wenn man mit der 1. natürlichen Zahl anfängt, das ist die 1 , und dann weiter zählt, dann gibt es schon bald ein eindeutiges Ergebnis: die 10. Zahl ist die 10 ! Der Ungläubige kann dann weiter zählen, etwa bis zur 100. natürlichen Zahl, das ist die 100 , und insgesamt sind es bis dahin 100 natürliche Zahlen. Noch weiter abzuzählen erübrigt sich dann wohl. So kann man auch gerade Zahlen abzählen, bis zur 100. geraden Zahl, das ist die 200 , und auch ungerade Zahlen, wiederum bis zur 100. Zahl, das ist die 199 . Sogar Ordinalzahlen können gezählt werden, dann am besten mit Hilfe der natürlichen Zahlen: als letzte von 100 Ordinalzahlen taucht dann die 100. auf.

Beim Abzählen von Zahlen einer Zahlenfolge, mit der ersten Zahl dieser Folge nach der 0 begonnen und bis zur 100. Zahl dieser Folge fortgesetzt, findet man immer genau 98 Zahlen dazwischen. Das funktioniert auf ganz gleiche Weise sowohl bei den natürlichen Zahlen als auch bei den geraden und den ungeraden Zahlen, und sogar bei den Primzahlen. Primzahlen abzuzählen ist nur viel mühsamer, vor allem wenn man erst beweisen muss, dass es welche sind, statt diese einfach einer Liste zu entnehmen. Aber in jedem Falle, bei all diesen Zahlenfolgen sind es genau 98 Zahlen zwischen der 1. und der 100. Zahl einer solchen Reihe. Anders gewendet: die 1. und die 100. Zahl einer Zahlenreihe sind immer gleich weit voneinander entfernt, nämlich in dieser Reihe genau 99 Zahlen weiter. Das heißt natürlich nur, dass man bei diesen Folgen alle ihre Zahlen fortlaufend mit Ordinalzahlen versehen kann, also sie abzählen kann so weit man will. Was als Ergebnis der etwas umständlichen Überlegung schließlich herauskommt? Nichts anderes als eben die Folge der Ordinalzahlen, und falls diese nicht mehr zum Zählen von Etwassen verwendet werden, dann sind sie reduzierbar auf die Folge der natürlichen Zahlen. Aber kann man mit solchem Abzählen herausfinden, wie viele Zahlen eine solche Zahlenreihe insgesamt „hat“ ? Offenbar nicht, denn in jeder dieser Zahlenreihen folgt nach der bislang letzten Zahl schon wieder eine weitere, und das ohne Ende.

Ad 2: Wenn man dagegen abschätzen will, wie groß insgesamt die Mengen der Zahlen von verschiedenen Zahlenreihen sind, sollte man wohl anders vorgehen: Ein erster Anhaltspunkt ist die unterschiedliche **Dichte** der Zahlen solcher Reihen, verglichen mit der lückenlosen Abfolge der natürlichen Zahlen. So haben Primzahlen zwar einen verglichen mit den ungeraden Zahlen sehr ähnlichen Start, ungerade Zahlen: 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 ...

Prim-Zahlen: 1 3 5 7 11 13 17 19 23 ...

aber es tun sich weiterhin zunehmend größere Lücken bis zur jeweils nächsten Primzahl auf und die Primzahlen sind insgesamt deutlich seltener gesät als die ungeraden Zahlen. Dagegen sind die Folgen der geraden und der ungeraden Zahlen gleich dicht, denn die geraden Zahlen füllen die Lücken in der Reihe der ungeraden Zahlen aus und umgekehrt:

ungerade Zahlen: 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 .....

gerade Zahlen: 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 .....

Wegen dieses Ergänzungsverhältnisses sind gerade und ungerade Zahlen gleich häufig, und verglichen mit den natürlichen Zahlen, aus denen sie durch Selektion abgeleitet sind, sind sie genau halb so häufig wie diese. Wenn allerdings die Dichte der Zahlen einer Folge sich in ihrem weiteren Verlauf ändert, wie bei den Primzahlen, wird es um so schwieriger, eine Abschätzung ihrer Gesamtmengen vorzunehmen bis jeweils zu dem „Stop“, an dem der Vergleich mit einer anderen Zahlenfolge vorgenommen wird. Eine solche Abschätzung ist wohl nur möglich mit Hilfe eines Kalküls, mit dem die beim Vergleich zugrundegelegte Länge der Folge (in der Regel: der natürlichen Zahlen) berücksichtigt wird.
Ich komme nun auf das Buch der beiden Kaplans zurück, und zwar bezogen auf ihr eigentliches Thema: „Das Unendliche denken“. Ich setze ihre Überlegungen in eine von mir selbst formulierte Frage um: Kann eine solche Zuordnung von Zählzahlen zu gezählten Etwassen auch dann als „Abzählen“ verstanden werden, wenn das Abzuzählende, etwa eine Zahlenreihe anderer Art (z. B. gerade Zahlen, ungerade Zahlen, Produkte von Multiplikationen, Potenzen, schließlich sogar Primzahlen) seinerseits je für sich genommen gleichermaßen unendbar ist? Viele Mathematiker, angefangen mit Georg Cantor (1845 – 1918), sind tatsächlich dieser Meinung: Für sie genügt, wenn eine 1-zu-1-Zuordnung zwischen einer solchen Zahlenfolge und der Folge der natürlichen Zahlen hergestellt werden und parallel unbegrenzt fortgesetzt werden kann. Danach wäre jede Zahlenfolge, die gleichermaßen wie die Folge der natürlichen Zahlen unbegrenzt fortsetzbar (= unendbar) ist und ihr paarweise zugeordnet werden kann, im Prinzip „abzählbar“. Da es aber in diesen Folgen, an welchem Punkt des Weiterzählens auch immer, unbegrenzt weitere Zahlen gibt, können sie nicht „zu Ende“ gezählt werden, um ihre genaue Anzahl festzustellen (dies jedenfalls verstehen wir in der alltäglichen Umgangssprache unter „abzählen“!). Zweifellos kann aber auch bei unendbaren Reihen zwischen noch so weit voneinander entfernten Zahlen ihr Abstand „abgezählt“ (durch Subtraktion errechnet) und es können Zwischensummen festgestellt werden.

Und es gilt weiterhin, dass etwas, was bei kleinen Zahlen feststellbar ist oder wie mit ihnen rechnerisch umgegangen werden kann, auch bei noch so großen Zahlen möglich ist, was die Kaplans etwas leichtsinnig als den „Sprung der Mathematik ins Unendliche“ (S. 20) bezeichnet haben. In ähnlichem Sinne behaupten sie, es „gäbe“ unendlich viele Zählzahlen (S. 15), wo sie doch kurz davor, im selben Satz, richtiger formuliert hatten, “Sie wissen mit der ganzen Gewissheit der Vernunft, dass die Zählzahlen nicht enden können“, in meiner Ausdrucksweise, dass das Zählen mit der Reihe der natürlichen Zahlen unendbar ist. „Die Unendlichkeit“ dagegen ist nichts, was es „geben“ kann, außer im weiten Bereich der theologischen Spekulation. „Unendlich“ (∞) ist keine Zählzahl, taugt nicht zur

Mengenangabe! Die Kaplans sehen diese Problematik selber ganz klar und schreiben: „... jeden, der behauptet, es gebe eine letzte Zahl, könnten (wir widerlegen), indem wir ... (nach) allen bereits erzeugten Zählzahlen ... in der Lage (sind), ... eine nächste Zählzahl zu erzeugen – jedoch weder mit dem Recht, der Fähigkeit noch der Notwendigkeit, sie alle zugleich in ihrer Totalität (H. Sch.: in ihrer geschlossenen Menge) zu beschwören ... Die Spannung zwischen diesen beiden Blickwinkeln – dem potentiell Unendlichen der Bewegung und dem (aktual) Unendlichen der Totalität – hält bis heute an und eröffnet immer neue Zugänge zum Wesen der Mathematik“ (S. 16). Genau darum geht es mir!

Aber diese Problematik hat Cantor nicht daran gehindert, die Zählzahlen in ihrer „Gesamtheit“, als eine „Menge“ der natürlichen Zahlen, mit dem Symbol $\mathbb{N}$, einem Mengenzeichen, zu versehen (Kaplan, S. 18). Und was mit einem Symbol bezeichnet wird und benannt werden kann, da gibt es anscheinend auch! So konnte aus der vernünftig-konstruktiven Aussage, „**jede** natürliche Zahl hat einen Nachfolger, der wieder eine natürliche Zahl ist, die wiederum eine natürliche Zahl ist, und so fort“ unversehens der Plural „**die** natürlichen Zahl**en**“ werden und dann, anscheinend zwangsläufig, „die **Gesamtheit** der natürlichen Zahlen“ bzw. die „**Menge**“ der natürlichen Zahlen. Oder, um auf den Abschnitt über „Alle und jeder“ zurückzukommen, aus „**jede** natürliche Zahl“ wird „**alle** natürlichen Zahlen“, als wäre das ein und dasselbe!

Die Kaplans haben gegenüber einer solchen Gleichsetzung von unendbaren Folgen mit allendlichen Mengen anscheinend gewisse Reserven, und sie lassen das daran erkennen, dass sie den Begriff der (eine Gesamtheit einschließenden) **Menge** mit dem als gerichteten Pfeil darstellbaren Begriff der **Zeit** konfrontieren. Zwar existieren die Dinge dieser Welt im Raum – „aber wie zahlreich sie sind (oder sein können), (das) bemisst sich in der Dimension der Zeit, pflegen wir uns doch das rhythmische Zählen in die Zukunft projiziert zu denken“ (S. 12). Sie fragen weiter: „Misst die Zahl die Zeit oder die Zeit die Zahl? Und haben wir ... gerade bewiesen, dass die fortlaufende Zeit unendlich ist?“ (S. 15). Ich selber werde versuchen, der Beantwortung dieser Frage näher zu kommen, und konstatiere schon mal, dass das Fortschreiten der Zeit ebenso unendbar ist wie die Abfolge der natürlichen Zahlen. Oder etwas persönlicher gesagt, in der Sicht eines schon älteren Mannes: „Es wird von Mal zu Mal später!“, und etwas konkreter, kurz vor 24 Uhr ausgesprochen: „Gleich ist es wieder Heute!“

Die Kaplans bemühen auch einige Mathematiker, welche die Zeitlichkeit des Zählens (und damit der Zahlenreihe) bezeugen. So schrieb „William Rowan Hamilton, der irische Mathematiker, ... bereits 1833 prophetisch, die Intuition der Zeit sei der einzige Ursprung der Zahl“ (H. Sch.: des Zählens!), und „Brouwer ... erklärte ..., die Zeit sei das Urelement, aus dem die Mathematik hervorgehe“ (S.76). und er verstand „Funktionen, die auf Zahlen einwirken, als zeitliche Gebilde“ (S. 79). Sie können auch als Handlungsanweisungen angesehen werden, auch als Ergebnisse geistigen Tuns. Und schon am Anfang ihres Buches fragen R. und E. Kaplan: „Sind wir es selbst ... , die die eigentliche Heimat der Unendlichkeit sind? ... ist das Unendliche vielleicht lediglich in der Sprache?“ (S. 9).

### 4.6.7. Die bijektive Zuordnung von verschiedenen Zahlenfolgen

Cantor behauptete in seinen Weiterungen der Mengenlehre, dass die Folgen der natürlichen, geraden und ungeraden Zahlen und der Primzahlen „gleichmächtig“ seien. Für die Einschätzung dieser gewagten Annahme ist von Bedeutung, dass G. Cantor dabei, eben weil es ihm ums Weiterzählen geht, die Definition der **Ordinal**zahl auf den Fall unendlich großer Zahlenmengen erweitert hat. In seiner Mengentheorie geht es ihm um die unbegrenzte

Fortsetzung des Zählprozesses, zunächst bei der Folge der natürlichen Zahlen, und zwar in der Form von „**transfiniten**“ Ordinalzahlen. Von diesen leitet er den Begriff der **Kardinalzahl** ab, die eine Ordinalzahl $\alpha$ ist mit der Eigenschaft $\alpha \leq \delta$ für alle zu ihr gleichmächtigen Ordinalzahlen $\delta$.

Wie schon beim Abzählen von sonstwelchen Etwassen mit Hilfe von Ordinalzahlen geht es auch beim Abzählen von Zahlen der verschiedenen Zahlenfolgen um **bijektive** Zuordnungen. Die Bijektion (aus dem Lateinischen, deutsch etwa „Doppelwurf“) ist in der Mathematik eine umkehrbar eindeutige Abbildung oder Zuordnung: für jedes Element einer Menge X gibt es dann genau ein und nur ein Element der Menge Y und umgekehrt. Die Herkunft der Cantorschen unendlichen Mengen aus der Theorie der Ordinalzahlen lässt sich leicht demonstrieren: Auch bei Cantors Vergleich der „Mengen“ von natürlichen, geraden und ungeraden Zahlen sowie Primzahlen geht es ihm um bijektive Zuordnungen, indem er nämlich die verschiedenen Zahlenfolgen im Grunde der Folge der Ordinalzahlen zuordnet:

Es folgen aufeinander

| die 1. natürliche Zahl, | die 2. nat. Zahl, | die 3. nat. Zahl, | die 4. nat. Zahl, | die 5. nat. Zahl, ... |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

| die 1. gerade Zahl, | die 2. gerade Zahl, | die 3. gerade Zahl, | die 4. ger. Zahl, | die 5. ger. Zahl, ... |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |

| die 1. ungerade Z., | die 2. ungerade Z., | die 3. ungerade Z., | die 4. unger. Z., | die 5. ung. Zahl, ... |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 9 |

| die 1. Prim-Zahl, | die 2. Prim-Zahl, | die 3. Prim-Zahl, | die 4. Prim-Zahl, | die 5. Prim-Zahl, ... |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 5 | 7 | 11 |

Merke: Ganz gleich, welche Zahlenfolge abgezählt wird, die dazu verwendete Folge der Ordinalzahlen ist immer dieselbe, bis in alle Unendlichkeiten identisch. **Nach** solcher Zuordnung und bei jedem beliebigen Stop des parallelen Zählens sind die „Mengen“ der Ordinalzahlen und der mit ihnen gezählten Zahlen der verschiedenen Zahlenfolgen notwendigerweise immer gleich. Das macht ja den Sinn des Zählens aus, selbst wenn man Zahlen von geordneten Zahlenfolgen zählt! Das Abzählen von Etwassen, auch von Zahlen, geschieht in jedem Falle bijektiv, d. h. je einem Etwas wird nur eine der aufeinanderfolgenden Ordinalzahlen zugeordnet, und jede dieser Zählzahlen trägt zum Zählen nur von einem der Etwasse bei. Sonst würde es keinen Sinn machen! Die verglichenen Folgen sind gleich, von mir aus auch „gleichmächtig“, solange man sie mit Ordinalzahlen (oder diese stellvertretend: mit natürlichen Zahlen) abzählt. Das heißt aber nicht, dass auch alle diese Folgen gleich viele Zahlen „enthalten“, also insgesamt gleichmächtig sind, sondern nur, dass man ihre Zahlen **gleichermaßen** mit Ordinalzahlen versehen, also **abzählen kann!** Sie sind aber keineswegs von gleicher Menge, wenn man ihre verschiedenen mal lückenlosen, mal dichten und mal seltenen Mengen und sogar Null-Mengen vergleicht. Gar keine Zahlen, etwa außer der 0, von der es immerhin eine gibt, sind am seltensten, und die Brüche und Dezimalzahlen sind noch häufiger als die natürlichen Zahlen.

Befassen wir uns nun näher damit, wie Georg Cantor (1845 – 1918) im Einzelnen mit solchen Fragen umging. Ausgangspunkt war für ihn die Folge der natürlichen Zahlen (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, usw.), über die ich in meiner eigenen Sprechweise aussage, dass sie unendbar ist („Jede natürliche Zahl hat einen Nachfolger, .. usw.“). Dieser Zahlenfolge können auch andere (anders konstruierte) Zahlenfolgen zugeordnet werden, angefangen mit der Reihe der geraden Zahlen: „Obwohl nur jede zweite natürliche Zahl gerade ist, lässt sich jeder natürlichen Zahl ihr Doppeltes zuordnen“ (Kaplan, S. 294). Wir können somit im schrittweisen Fortsetzen der beiden Reihen jede weitere natürliche Zahl mit einer weiteren geraden Zahl paaren

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ....

2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 ....

und im weiteren Fortschreiten anscheinend „alle“ natürlichen Zahlen mit „allen“ geraden Zahlen, was den Anschein erweckt, es gebe genau so viele gerade wie natürliche Zahlen. Simon Singh (Fermats letzter Satz, dtv-Verlag, 2006), der Cantors Zuordnungsmethode referiert (S. 119), zieht dann auch – mit Cantor – die kühne Schlussfolgerung: „Wenn jedes Element aus der Liste (!) der natürlichen Zahlen mit einem Element aus der Liste (!) der geraden Zahlen gepaart werden kann, dann müssen (!) die beiden Listen (!) gleich groß sein“ (S. 120) (Hervorhebungen durch Ausrufezeichen von mir, H. Sch.). Ich ergänze gleich mit kritischen Unterton: nur die beiden **so** gewonnenen, mit genau dieser cantorschen Methode der bijektiven Zuordnung parallelisierten „**Teil**listen“ sind gleich groß! Denn wenn man die beiden Zahlenfolgen einander so zuordnen würde, wie das jeder Laie tun würde (und wie es mancher Mathematiker vor und nach Cantor hätte tun können), weil es einfach nahe liegt, nämlich

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

2 4 6 8 10 12 14

Stop!

dann wären die beiden „Zahlenmengen“, die wir durch eine mit „Stop“ beendete Zuordnung gewonnen haben, ohne Zweifel **un**gleich: die Menge der natürlichen Zahlen ist bei einem derart zuordnenden Doppelzählen natürlich jeweils (bei jedem Stop) genau doppelt so groß wie die der geraden Zahlen. Wen wundert’s!

Singh sieht das anders: „ ... die Anzahl der geraden natürlichen Zahlen .... , die uns zunächst kleiner vorkommen mag (!), (ist) ebenfalls unendlich. Es ist leicht zu zeigen, dass die Menge der natürlichen Zahlen und die Menge der geraden Zahlen vergleichbar sind“ (S. 119). Sie sind es aber offenbar **nur** bei der von Cantor gewählten und vorgeschlagenen Methode der bijektiven Zuordnung. Und vergleichbar sind die beiden Zahlenfolgen (nicht: ihre Mengen!) nur in der Hinsicht, dass sie beide unendbar sind, in vergleichbarer Weise fortsetzbar: die eine Folge mit jeweils einem Schritt, die andere mit jeweils zwei Schritten. Sie sind also nur gleichermaßen erweiterbar, aber keineswegs gleich unendlich oder „gleich mächtig“.

Kaplan geht Cantors weiteren Verallgemeinerungen nach: „Ähnliche Zuordnungen lassen sich in großer Zahl finden“ (S.294). Man kann in der Tat auch alle möglichen anderen Arten von natürlichen Zahlen (ungerade Zahlen, arithmetische und geometrische Reihen, Quadratzahlen, höhere Potenzen, selbst Primzahlen, falls man diese in ihrer Abfolge nummeriert) in eine bijektive Zuordnung zu der unendbaren Folge der natürlichen Zahlen bringen, so weit auch in diesen Folgen deren Elemente jeweils unendbar aufeinander folgen, wenn auch mit Abständen größer als 1, so z. B. mit dem Abstand 3:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 ....

1 4 7 10 13 16 19 22 25 28 31 34 37 40 ....

In jedem solchen und ähnlichen Falle ergibt sich eine im Prinzip unendbare paarweise bzw. im Zick-Zack oder in Diagonalen erfolgte Zuordnung zweier unendbarer Zahlenreihen. Und mit Hilfe der natürlichen Zahlen kann man die derart zugeordneten Zahlenreihen „abzählen", so lange wie man will, nur kann man sie nie jemals „zu Ende" zählen, um ihre Menge festzustellen. Das war's dann auch schon! Alles weitere Reden über vergleichbare Unendlichkeiten ist dagegen hoch spekulativ. So führt nur die von Cantor gewählte Vergleichsmethode und seine Interpretation, dass man mit ihr die Gleichmächtigkeit solcher Zahlenmengen beweisen könne, zu den von Singh angesprochenen „Schlussfolgerungen, unter anderem zu der Feststellung, dass es eine unendliche Anzahl von Primzahlen gibt" (S. 119). Dass es „Gleichmächtigkeit"?, „Zahlenmengen"?, „Schlussfolgerungen"? „Feststellung"? „unendliche Anzahl"? „gibt"? Wer's glaubt, wird selig.

Cantor ersetzt also die Anzahl der Elemente einer Menge durch den Begriff der Mächtigkeit einer solchen Menge. So hat die Menge der ersten Million Zählzahlen (1 – 1.000.000) die Mächtigkeit von einer Million (Kaplan, S. 296). Und wenn wir bei einer Zahlenmenge fragen: Wie viele Zahlen sind das insgesamt? Sind die Zahlenmengen („Mächtigkeiten") verschiedener Zahlenreihen unterschiedlich groß, und in welchem Ausmaß?, „dann können wir mit Kardinalzahlen antworten, die angeben, welche Mächtigkeiten eine Menge hat: das heißt, wie viele Elemente sie enthält" (Kaplan, S. 296). Enthält?

Das für jeden Laien und manchen Mathematiker Überraschende ist nun, dass „die Mengen $\mathbb{N}$ und m * $\mathbb{N}$ (m ist ein Multiplikator, z. B. „**mal** 3") die gleiche Mächtigkeit" haben, weil das durch ihre eindeutige Zuordenbarkeit belegt sei (Kaplan, S. 296). Einspruch! Denn das gilt nur, **falls** sie mit der Methode von Cantor eindeutig zugeordnet wurden und nur bis zu einem beliebigen Stop der so erfolgten Paarungen. Auch im Falle der Zuordnung von natürlichen Zahlen zu ihren Quadratzahlen werden keinesfalls alle derartigen Zahlen der beiden Zahlenreihen gleichzeitig in ihren „Mengen" verglichen, sondern nur diejenigen Zahlen beider Zahlenreihen, die schon jeweils vorweg in die Folge der Paarungen aufgenommen worden sind. Was außer und nach den Paarungen an Zahlen auftritt, insbesondere welche Zahlenmassen insgesamt, ohne vorherige Paarung in einen Mengensack gestopft werden könnten, das interessiert dabei anscheinend nicht! Aber wenn überhaupt von fraglichen „Mengen" oder Gesamtheiten verschiedener Zahlenarten die Rede ist, dann sollten diese nicht nach vorweg einschränkender Paarung, also insofern selektiv, sondern schon ohne vorherige Paarung gleichzeitig zwischen allen ihren bis zum Vergleich aufgetretenen Elementen verglichen werden.

### 4.6.8. Kritische Anmerkungen und Ertrag der eigenen Überlegungen

Ohne Zweifel kann man bijektive Zuordnungen mit Cantorscher Methodik durchführen. Mathematisch ist dagegen zunächst überhaupt nichts einzuwenden. Nur der Versuch, darauf gründend unendbare Zahlenfolgen als „Mächtigkeiten" im Sinne einer ihre Elemente einschließenden „unendlichen Menge" zu interpretieren, ist kaum vertretbar! Genau das ist der Punkt: das ganze Gebäude der Cantorschen Weiterungen der Mengenlehre bis ins Reich der Kardinalzahlen steht auf einem sehr schmalen und zugleich brüchigen Pfeiler, nämlich auf der durch bijektive (parallele, ggf. diagonale) Abbildung begründeten Zuordenbarkeit von Zahlenfolgen.

Die in der Reihe der gezählten Zahlen der einen Art erreichte Menge ist „gleichmächtig“ (umfasst die gleiche Anzahl) **nur** wie die durch einen Stop begrenzte Menge der von den Ausgangszahlen (etwa den natürlichen Zahlen) her jeweils parallel generierten (verdoppelten, multiplizierten, potenzierten etc.) und eins-zu-eins zugeordneten Zahlen anderer Art. Mehr als diese Tautologie („was man hergestellt hat, kann man dann feststellen“) ist aus dem Cantorschen Ansatz nicht herauszuholen.

Was wir mit plausibler Begründung sagen können ist also nur, dass durch die eindeutige (eins-zu-eins)-Zuordnung auf die cantorsche Weise je endliche „Mengen“ definiert werden können, die bei einer solchen Zuordnung natürlich bei jedem Stop „gleich mächtig“ sein müssen. Das führt selbst dann nicht zur Gleichmächtigkeit von „unendlichen“ Mengen, wenn die Reihen unendbar sind. Unendbar sind solche Folgen ja schon von Anfang an, weil sie so konstruiert worden sind, und sie können immer weiter (ja sogar **noch** weiter!), **unendbar** weiter fortgesetzt werden. Dass solche Zahlenfolgen je für sich genommen unendbar sind, und zwar schon von ihren Konstruktionsprinzipien her, also von Anfang an, schon in den ersten zehn Gliedern einer solchen Folge, dass also die in ihrer „Menge“ zu vergleichenden Zahlenfolgen in gleicher Weise unendbar fortgesetzt werden können, rechtfertigt nicht den Schluss, dass sie in gleicher Weise unendlich und sogar „gleich mächtig“ sind.

Die Gleichmächtigkeit ist demnach keine Feststellung über eine Mengengleichheit von unendbaren Folgen verschiedener Art, sondern nur über deren bijektive Zuordenbarkeit bis zum jeweiligen, an irgendeiner Stelle der unendbaren Folge der Zählzahlen durchgeführten Stop. Und nur unter dieser Voraussetzung können die Kaplans (mit Cantor) konstatieren:

„Die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ hat die gleiche Mächtigkeit wie die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$“ (S. 395). Denn um zu zeigen, dass diese beiden „Mengen“ von gleicher Mächtigkeit sind, genügte es dem Erfinder dieser Theorie, zuvor eine eindeutige Zuordnung zwischen Teilmengen der Folge der natürlichen Zahlen und den reellen Zahlen (Dezimalzahlen) hergestellt zu haben.

Es läuft also alles auf die Frage hinaus, ob die bijektive (oder ggf. andere) Abbildbarkeit und Zuordnung zweier bzw. mehrerer Zahlenfolgen erlaubt, die Gleichmächtigkeit dieser Folgen insgesamt zu behaupten und deren Unendlichkeit zu garantieren. Dieser Frage haben auch die Kaplans nicht ausweichen wollen, und sie gehen ihr nach, nachdem sie zuvor über weite Strecken ihrer Abhandlung sich darauf beschränkt hatten, die Unendlichkeitsspekulationen von Cantor korrekt zu referieren. Ab Seite 295 und vor allem Seite 300 resümieren die Kaplans abschließend ihre Darstellung der Cantorschen Mengenlehre, insbesondere die Methode der bijektiven Zuordnung und deren Ergebnis, nämlich die von Cantor behauptete Gleichmächtigkeit der „Mengen“ der natürlichen, der geraden und der ungeraden Zahlen, mit ihren Weiterungen für die Problematik der Unendlichkeiten. Die Kaplans sind zwar noch etwas zögerlich in ihrer Kritik, aber sie sprechen doch die Knackpunkte von Cantors Argumentation deutlich genug an und kommentieren sie mit im Einzelnen treffenden Einschätzungen.

Im Folgenden will ich versuchen, den Ertrag meiner eigenen Überlegungen, die ich in den letzten Abschnitten vorgetragen habe, zusammenhängend und zusammenfassend darzustellen. Ich werde an die Kritik der Kaplans inhaltlich anknüpfen und diese weiterführen, nämlich verschärft bis zu einer stringenteren Darstellung des Problems und entschiedeneren Beantwortung der dabei aufkommenden Fragen. Beginnen will ich diese Schlussbetrachtung mit einer kurzen Wiederholung: Beim Vergleich der Mengen von natürlichen, geraden und ungeraden Zahlen liegt es nahe, sie in Zeilen so anzuordnen, dass in diesen Zeilen die jeweils gleichen Zahlen in Spalten untereinander eingesetzt werden (Abbildung A):

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A) | natürliche Zahlen | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | | | ...... |
| | gerade Zahlen | | 2 | | 4 | | 6 | | 8 | | Stop! | ...... |
| | ungerade Zahlen | 1 | | 3 | | 5 | | 7 | | | | ...... |

Ich kann dann die Folge der natürlichen Zahlen und die darin gleichermaßen sich entwickelnden Folgen der geraden und der ungeraden Zahlen abzählen zunächst einmal bis zu einem Stop, der durch die gerade erreichte natürliche Zahl definiert ist (in der Abbildung also nach der 8). Wie viele Zahlen die verglichenen Folgen jeweils in einer Zwischenfüllung zwischen Start und Stop enthalten, ist leicht durch das Anlegen von Ordinal-Zahlen an die anderen Folgen herauszufinden, so dass diese dadurch abzählbar werden. Dann kann ich die „Mengen“ der bis dahin angesammelten Zahlen der drei Arten von Zahlenfolgen vergleichen, und dies fortgesetzt bis zum nächsten und weiteren Stop, und stelle jedes Mal wieder fest, dass bis zum Stop nur halb so viele gerade bzw. ungerade Zahlen vorkamen wie natürliche Zahlen. Wen wundert’s ?!

Cantor dagegen zählt die Mengen auf andere Weise. Ähnlich wie etwa 2500 Jahre vor ihm der griechische Philosoph Zenon durch die von ihm eingeführten Stops „beweisen“ konnte, dass Achill die mit Handicap-Ausgleich vorausgeschickte Schildkröte nie einholen könnte, nutzt Cantor beim Zählen von Zahlen der drei hier verglichenen Zahlenfolgen auf recht eigenwillige Weise eine andere als die eigentlich naheliegende, in Abbildung A) demonstrierte Zuordnung und damit auch andere Stops, um dann mittels Abzählen den Mengenvergleich vorzunehmen. Er parallelisiert die drei Zahlenfolgen gleich von Anfang an, Zahl nach Zahl, ohne Lücken innerhalb der Folgen der geraden und der ungeraden Zahlen freizulassen (Abbildung B):

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| B) | natürliche Zahlen | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | | .... |
| | gerade Zahlen | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | Stop! | .... |
| | ungerade Zahlen | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | | .... |

Das ergibt tatsächlich eine Eins-zu-Eins-Zuordnung zwischen der Zahlenreihe der einen Art und den Folgen der beiden anderen Arten, und auf dieser methodischen Grundlage aufbauend kann Cantor bei irgendeinem Stop – in unserem Beispiel definiert durch die natürliche Zahl „11“ – feststellen, dass die drei Zahlenfolgen bis dahin jeweils gleiche Mengen an Zahlen angesammelt haben. Solche Stops können in wechselnden Abständen wiederholt werden, aber jedes Mal werden bei einer Zählung der Zahlen der drei Folgen ihre Mengen sich als gleich erweisen. Wenn nämlich die Mengen der gezählten Zahlen bis zum Zwischenstop als dann abgeschlossenes Ganzes gesehen werden, also als jeweils gleichermaßen viele Elemente einschließende Mengen, dann passen bis dahin alle natürliche Zahlen genau zu allen geraden oder auch zu allen ungeraden Zahlen, **die** ihnen zugeordnet wurden oder aber **denen** sie zugeordnet wurden. Was ist der Unterschied zwischen den beiden Formulierungen am Satzende? Im ersten Falle werden die natürlichen Zahlen auch als Folge betrachtet, und wären insoweit vergleichbar mit den beiden anderen Folgen, dagegen könnten sie im zweiten Falle als Mittel des Zählens missverstanden werden. Es macht aber einen Unterschied aus, ob man die Zahlen der einen oder auch irgendeiner anderen Zahlenfolge abzählt (das kann man, wie wir wissen, bei all solchen Folgen unendbar fortsetzen, wenn einem an diesem Zählen etwas liegt), oder ob man versucht, einen Vergleich zwischen den Mengen der natürlichen, der geraden und der ungeraden Zahlen je insgesamt durchzuführen. Dafür empfehle ich die unter A) dargestellte Methode.

Denn Cantor ordnet mit der Methode B) der Abfolge der natürlichen Zahlen eine zwar gleichermaßen geordnete Abfolge der geraden (bzw. ungeraden) Zahlen zu, die aber im Unterschied zu ihrem tatsächlichen Vorkommen unter den natürlichen Zahlen um das Doppelte verdichtet ist, nämlich weil er die durch das Weglassen der jeweils einen Zahlenart aufgekommenen Lücken zwischen den Zahlen der anderen Zahlenart mit seiner Zuordnungsmethode nicht beachtet und beim Abzählen ihrer Menge nicht mehr berücksichtigt (in der Abbildung C durch Punkte gekennzeichnet):

| | | | |
|---|---|---|---|
| C) | 1 2 3 4 5 6 7 8 9 | | .... |
| | 2 . 4 . 6 . 8 .10 .12 .14 .16 .18 | Stop! | .... |
| | 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 .13 .15 .17 | | .... |

So setzt er sich einigermaßen willkürlich über die mit der Methode A) feststellbaren Dichteunterschiede der verglichenen Zahlenfolgen hinweg und komprimiert gleichsam die geraden Zahlen unter Weglassen der ungeraden Zahlen und auch der dadurch entstandenen Lücken zu genau der gleichen Dichte wie der Dichte der natürlichen Zahlen. Und wenn er dann beim Auszählen der in gleichem Maße anwachsenden Zahlenmengen einen Zwischenstop einlegt, an welcher Stelle auch immer, dann kann er, offenbar zu seiner Überraschung, immer wieder gleiche Mengen der bis dahin gezählten natürlichen und der geraden bzw. ungeraden Zahlen feststellen. Dies kann er unendlich lange (ich würde lieber sagen: unendbar) fortsetzen. Eine solche Feststellung bedenkend kommt Cantor dann zu dem Ergebnis, dass alle drei Zahlenfolgen gleich lang sind, von gleicher Mächtigkeit, nämlich alle drei von je unendlich großer Menge! Ist diese Schlussfolgerung gerechtfertigt? Das wage ich zu bezweifeln. Denn wenn Cantor gegen jeden Augenschein und gegen jede diesen überprüfende rationale Überlegung dennoch behauptet, dass die von ihm auf seine Weise hergestellten Zuordnungen zwischen natürlichen und geraden bzw. ungeraden Zahlen zeigen würden, es gebe ebenso viele Zahlen der einen Art wie der beiden anderen Arten, dann setzt das „einen außerordentlich kühnen Gedankengang" (Kaplan, S. 295) voraus, um nicht noch kritischer zu sagen, einen sehr kurzschlüssigen. Cantors Beweisführung funktioniert nämlich nur unter der Bedingung, dass die sich wiederholenden Lücken zwischen den aufeinander folgenden geraden (bzw. ungeraden) Zahlen unbeachtet bleiben und bei der Anordnung und beim vergleichenden Abzählen der verschiedenen Zahlenfolgen jeweils bis zum Stop nicht berücksichtigt werden. Nur wenn man dem durch Cantors Methode der Zuordnung vorgeschriebenen Weg bedenkenlos folgt, kann man eine Gleichmächtigkeit der auf solche Weise verglichenen Zahlenfolgen feststellen.

Wenn jedoch bei der Zuordnung von Folgen der geraden bzw. ungeraden Zahlen zu den ersten 100 natürlichen Zahlen die von Cantor nicht berücksichtigten Zahlen anderer Art zumindest als Lücken die Anordnung der zu zählenden Zahlen einer Folge beeinflussen, wie im Beispiel A), dann ist Folgendes augenscheinlich und auch rational überprüfbar: Wird der Vorgang des Zählens der Zahlen der drei einander zugeordneten Zahlenfolgen unter Berücksichtigung der Lücken mit einem Stop nach 100 abgebrochen, dann ist mit solcher eigentlich naheliegender Zuordnung **keine** Gleichmächtigkeit der verglichenen Zahlenfolgen zu erreichen. Unter den ersten 100 natürlichen Zahlen findet man nur genau 50 gerade Zahlen, also nur genau halb so viel wie die natürlichen Zahlen, und ebenso nur 50 ungerade Zahlen, das ist auch nur die Hälfte von 100, und um die komplizierte Rechnung zum Abschluss zu bringen: beide Teilmengen ergänzen sich ganz genau zum Betrag 100!

Die Vielfachen von 3 sind natürlich noch dünner gesät als die von 2, und dennoch kann nach Cantor abermals behauptet werden, dass es von ihnen genauso viele gibt wie von den natürlichen Zahlen – **falls** man sich auf seine vertrackte Zuordnungsmethode eingelassen hat. Dann ist es wiederum ein Leichtes, bis zum Stop den natürlichen Zahlen genau so viele Dreifache eins-zu-eins zuzuordnen und dann wie gehabt die Gleichmächtigkeit beider Folgen festzustellen. Was nun für Verdoppelungen und Verdreifachungen natürlicher Zahlen gilt, das sollte doch wohl über diese beiden Multiplikatoren 2 und 3 hinaus verallgemeinert werden können, und das schafft Cantor ohne Schwierigkeiten, wenn er erklärt: Für jede natürliche Zahl m gibt es genau so viele Vielfache von m, wie es natürliche Zahlen überhaupt gibt. Die Kaplans kommentieren dies auf fein ironische Weise: „Was für ein kleiner Schritt für den Verstand, um seine eigene Art von Unendlichkeit zu beschwören“, und ich verschärfe: welch verstiegener Gedankengang!

Um ihn vollends ad absurdum zu führen, konstruiere ich mal eine bijektive Abbildung der folgenden Art:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | .......∞ |
| 1*∞ | 2*∞ | 3*∞ | 4*∞ | 5*∞ | 6*∞ | 7*∞ | 8*∞ | 9*∞ | 10*∞ | .......∞*∞ |

Unendlicher geht’s nimmer! Oder doch? (Ich will schnell noch einräumen: ∞ ist wohl doch keine multiplizierbare Zahl, wahrscheinlich überhaupt keine Zahl!). Sind nun die bisher genannten Zahlenfolgen, wenn wir auf Cantors Zuordnungsmethode verzichten, immer noch wirklich gleichmächtig? Wenn ich die beiden zuletzt angeführten Folgen vergleiche, drängt sich mir der Eindruck auf, sie seien „himmelweit“ **verschieden** „mächtig“! Da liegt die – sparsamere – Interpretation nahe, dass es in all den besprochenen Fällen nur um die „Gleichmächtigkeit“ der bijektiv abgebildeten und mit dieser Methode konstruierten **Teil**folgen geht, also nicht der Folgen selbst und insgesamt, sondern immer nur bis zu dem Punkt oder Stop, den die bijektive Zuordnung jeweils erreicht hat, ganz unabhängig davon, wie weit dieser Punkt vom Anfang (= der Zahl 1) der Folge der natürlichen Zahlen, auf die sich die cantorschen „Mengenvergleiche“ ja beziehen, entfernt ist, ggf. „unendlich“ weit. Die cantorschen Alephs sind in meiner Sicht keine Mengen, sondern unendbare Folgen, die sich durchaus bijektiv einander zuordnen lassen, nur dass sie auch dadurch nicht zu Mengen werden. Als Mengen müssten sie abgeschlossen sein, dagegen könnten sie als unendbare Folgen auch nach ihrer bijektiven Zuordnung unendbar bleiben.

Um die Kaplansche Kritik zu einer letzten Konsequenz zu führen, stelle ich fest: Aus einer beliebig langen Folge von natürlichen Zahlen können jeweils genau so lange Zahlenfolgen ihrer Vielfachen (auch Potenzen etc.) hergestellt werden. Und was man auf diese Weise **hergestellt** hat, nämlich die Gleichheit der bis zum jeweiligen Stop angesammelten Teilmengen, das kann man dann immer wieder **feststellen**: nämlich ihre bis in Unendlichkeiten wachsende „Gleichmächtigkeit“! Anders gewendet: Mit der **vom Anfang der Reihen an** von ihm praktizierten Methode der bijektiven Zuordnung konnte Cantor gleichfalls **von Anfang an** gleiche Teilmengen der verglichenen Zahlenfolgen herstellen, und er brauchte sich daher gar nicht zu wundern, dass er bei jedem weiteren Stop, bis in alle Unendlichkeit, die verglichenen Zahlenmengen als „gleichmächtig“ feststellen kann. Und er hätte sich der „Unendlichkeit“ gar nicht mit übergroßen Zahlen anzunähern brauchen, weil er die unendbare Abzählbarkeit der zu vergleichenden Folgen **schon von ihrem Anfang an** voraussetzen oder selber definieren konnte.

In all diesen Fällen überhaupt von „Mengen“ zu sprechen, erscheint mir ohnehin als sehr gewagt, denn bei Mengen spielt die Reihenfolge des Zählens ihrer Elemente normalerweise keine Rolle, im Unterschied zur zentralen Bedeutung ihres Enthaltenseins. Bei einer systematischen 1-zu-1–Zuordnung von gleichermaßen unendbaren Zahlenfolgen ist natürlich die Reihenfolge der zugeordneten Zahlen nicht gleichgültig, denn es ist eben diese Reihenfolge, welche die Gleichmächtigkeit der Mengen (zumindest der bis zu einem bestimmten Stop generierten Anzahlen von Elementen der verschiedenen Zahlenarten) garantieren soll. Es geht zwar bei Cantors bijektiven Zuordnungen jeweils bis zum Stop tatsächlich um *per definitionem* gleich große Mengen (eben weil es Paarungen sind!), aber diese Mengen sind immer endlich, auch wenn die beiden so zugeordneten Folgen je für sich unendbar sind.

Nach alledem widerspricht die Behauptung, dass eine unendliche Teilmenge gleich(mächtig) der sie einschließenden unendlichen Gesamtmenge ist, nicht nur, wie Weigand (S. 132) meint, „den intuitiven Vorstellungen von ‚Ein Teil ist kleiner als das Ganze‘“, sondern auch der Logik. Zu Versuchen, sie dennoch als wahr hinzustellen, bedarf es eher eines unerschütterlichen Glaubens. Im Unterschied zu dem vermutlich sophistisch raffinierten Zenon hat Cantor nämlich seine Zuordnungsmethode und deren Ergebnisse bis in die Unendlichkeits-Spekulationen ernst genommen. Warum wohl? Weil er vermeinte, auf diese Weise der Unendlichkeit Gottes näher gekommen zu sein, und dies sich selber und anderen Grüblern mit den Mitteln der Mathematik zu beweisen suchte.

## 4.7. Hintergründe von Cantors Theorie der Gleichmächtigkeit unendbarer Folgen

### 4.7.1. Theologisches

Es gibt so etwas wie eine Theologie der größten Zahlen und dementsprechend auch des ausdauernden Zählens. In vergleichbarer Weise wie beim Zählen von Kartoffeln (eine nach der anderen) könnte man auch bei den Sternen des Weltalls vorgehen, wenn man dem Inhalt des Kinderlieds trauen kann, in dem es heißt: „Weißt du wie viel Sternlein stehen an dem großen Himmelszelt? Gott der Herr hat sie gezählet, dass ihm auch kein einz’ges fehlet“. Das ist offenbar eine klare, wenn auch sehr allgemeine Aussage über eine Einschlussmenge: alle Sternlein passen quasi in einen himmlischen Sack, nämlich in das rundum geschlossene Himmelszelt. Man hat also das Zählen der Sterne zunächst Gott überlassen, denn nur Gott, der Ewige, könnte sich daran machen, sie alle zu zählen, nur Er hätte genügend Zeit zum Zählen. Um Doppelzählungen zu vermeiden, sollte Gott jedoch jeden von ihm gerade gezählten Stern anschließend löschen, so dass Er nur noch unter den noch leuchtenden Sternen weiterzählt. Denn beim Auszählen der Elemente einer schon vorgegebenen begrenzten Menge ist es naheliegend, dabei das jeweils gerade gezählte Element aus der Menge herauszunehmen, damit man es nicht doppelt oder mehrfach zählt. Für solch sukzessives Auszählen eignet sich eine Trennwand mit Tür oder Schleuse (ähnlich auch beim Zählen der Schafe einer größeren Herde), beim „Jüngsten Gericht“ allerdings mit zwei Türen, eine für die Seligen, die andere für die Sünder. Es könnte sogar zwei raumlose Gesamtspeicher Hi und Hö geben, in denen am Ende der Zeiten alle Menschen, so viele es je waren und so viele noch geboren werden könnten, in zwei Teilmengen einsortiert werden, und das für alle Ewigkeit: die verstockten und unbußfertigen Sünder in die Hölle, die von Gottes Gnade geretteten Seelen in den Himmel. Diese beiden Mengen mitsamt ihren Behältern Hi und Hö sind zwar praktisch streng getrennt, aber immerhin mengentheoretisch miteinander vereint in der Vereinigungsmenge Hi $\cup$ Hö, nämlich im Jenseits.

Viel schwieriger als das Zählen von Sternen bzw. von Seelen der Verstorbenen ist das Zählen von Zahlen, ein rechter Sport für rekordsüchtige, zahlenversessene junge Götter, die gerade nichts Besseres zu tun haben. Es soll sich schon mal ein junger Gott dumm und dämlich gezählt haben. Keine Angst! Denn in die Gefahr, sich dabei totzuzählen, konnte er, sofern er selber ewig war, dann doch nicht geraten. Die unendbare Folge der natürlichen Zahlen würde sogar dem ewigen Monotheos zu schaffen machen, Er hätte eine Ewigkeit lang allein damit zu tun. Auch für Menschen könnte es attraktiv sein, auf diese Weise gottgleich Unendlichkeiten „schaffen“ zu können, indem sie an eine Eins immer weitere Nullen anhängen, unendbar viele Nullen! Mit Zehnerpotenzen von Zehnerpotenzen könnte dies Zahlen-Erschaffen noch schneller gehen. Nur zu, es ist kinderleicht! Man braucht dazu nur Papier und Bleistift!
Angefangen mit 10 (unten Fett gedruckt), und mit jeweils höher gesetzten Zehnerpotenzen versehen:

10 und so weiter<br>
10<br>
10<br>
10<br>
10<br>
**10**

eine rechte Jakobsleiter bis in die Unendlichkeiten des Himmels, hin mein Gott zu Dir! Aber Zahlen immer größer und größer werden zu lassen, scheint mir keine sinnvolle Beschäftigung zu sein. Da gäbe es Besseres zu tun, nämlich sich etwas Zeit zum Nachdenken zu nehmen.

Deshalb nach diesen flapsigen Bemerkungen nun etwas ernsthafter: Die Nähe der Problematik der Unendlichkeiten, beispielsweise bei Annäherungen zu einem Grenzwert, zur Theologie ist schon daraus zu ersehen, dass Nikolaus von Kues sein berühmtes Gedankenexperiment, die schrittweise Annäherung vom Quadrat über regelmäßige Vielecke mit immer mehr Ecken bzw. Seiten bis hin zum idealen Kreis mit definiertem Radius, zur Demonstration der göttlichen Unendlichkeit nutzte. Auch andere nach ihm, so Leibniz und Newton, viel später auch Cantor, befassten sich mit den unendlich großen und den unendlich kleinen Werten der Mathematik angesichts der gleichermaßen unendlichen Differenz zwischen dem in so vielen Hinsichten unendlich großen Monotheos und dem Ihm gegenüber so verschwindend kleinen menschlichen Ich, das sich schon fast der Nichtigkeit einer Null nähert. Auch außertheologisch gilt: unendbare Wiederholungen weisen in die Zukunft und darüber hinaus in die Ewigkeit, und weitere Fortbewegungen führen schließlich in einen bisher noch unerschlossenen Raum und konstituieren ihn damit: Man kommt dann dort hin, wo man noch nie war, schließlich nach Utopia, ins Ortlose, dies aber vielleicht erst in einer fernen Zukunft, jedenfalls noch nicht heute. Solche Fortsetzungen „transzendieren“ in ein Jenseitiges, das man früher mit Himmel und Hölle bezeichnete und als Gott verehrte. Doch darüber mehr an anderer Stelle.

Das Einzige, was die von Cantor so genannten Mächtigkeiten immer noch überschreitet, längst schon vom Anfang der Zeiten an überschritten hat, das ist also der allmächtige, allwissende, allgegenwärtige, allbarmherzige, unendliche, ewige und insgesamt allendlich monomegale **Gott**. Es spricht einiges dafür, diesem Hintergrund cantorscher Theorien nachzugehen. Im sichtlichen Bemühen, die cantorsche Mengenakrobatik wenigstens korrekt zu referieren (oder vielleicht doch mit dem Hintergedanken, sie dabei *ad absurdum* zu führen?), führen die Kaplans die von Cantor praktizierten Zuordnungen weiter „bis zum Geht-nicht-mehr“. So schreiben sie, wie ich meine, wider besseres Wissen: Über eine solche Zuordenbarkeit „hat der gesamte dreidimensionale Raum die gleiche Mächtigkeit wie die Gerade. Es gibt ebenso viele Punkte im unendlichen Universum wie auf dem Querstrich dieses ‚t’ ....“ (S. 316). Da haben die Kaplans die cantorschen Katzen aus dem Mengen-Sack gelassen! Denn die von ihnen wiedergegebene Aussage ist nicht nur ‚t’-ologisch, sondern eminent theologisch, und darüber hinaus mystisch! Eine solche Relation zwischen der Unendlichkeit und dem Fast-Nichts finden wir nämlich schon bei Meister Eckhart (1260 – 1328), der in seinen Predigten die Beziehung zwischen dem unendlichen Gott zu jedem kleinsten „Seelenfünklein“ beschwört, ja sie bis in die Identität der *unio mystica* beider hoch steigert. Um es noch deutlicher zu sagen: Cantor hat in fromm apologetischer Absicht, ohne ein subjektives Gefühl der geistigen Unredlichkeit, die von ihm glaubend vorausgesetzte Unendlichkeit (Gottes!) in die aus bijektiven Zuordnungen abgeleiteten geistigen „Mächtigkeiten“ der mathematischen Mengenlehre transferiert, und wenn man kritisch den Effekt dieses Vorgehens betonen will: sie in die Mathematik hineingemogelt.

Es gibt tatsächlich im theologischen Denken einige unendliche (ich würde eher sagen: allendliche) Mengen, die sich so oder so aufeinander beziehen lassen, auch mal miteinander konkurrieren, und dabei immer neue Fragen aufwerfen: Ist Gott in der Welt, oder ist die Welt in Gott (Panentheismus), sind Gott und Welt eines (Pantheismus), oder sind Welt und Gott nur Schnittmengen, die teilidentisch sind auch mit der Menge alles dessen, was Menschen denken, sagen und aufschreiben können? Es ist wohl nicht daran zu zweifeln, dass es sich in all diesen Fällen um wirklich überaus große Mengen handelt, die man schließlich philosophisch in ein noch größeres Ganzes und zugleich Eines zusammensehen kann, etwa wie Karl Jaspers „das Umgreifende“ schon mit der Wortwahl als allumfassenden Mengensack gekennzeichnet hat. Aber all solche Spekulationen bringen dem Menschen nur wenig, denn je „ganzer“, je mehr „Alles“ und zugleich „Eines“, um so weniger kann es uns als Orientierung dienen.

Solche Begrifflichkeiten sind als Gottesrettungsversuche zu verstehen. In diesen spielen bestimmte Zahlen und Mengen schon seit jeher eine große Rolle, angefangen mit Echnatons Theologie des einen Gottes Aton (im ansonsten vorher und wieder nachher polytheistischen Alten Ägypten), dann in der christlichen Dreifaltigkeit und den nur durch autoritäre Machtsprüche aufhebbaren Differenzen zwischen monistischen, dualistischen und trinitarischen Gottesvorstellungen. Auch in der *„ancilla theologiae“*, der mittelalterlichen Philosophie und ihrer Metaphysik, in der es um das Ganze des Seins und um die letzten Dinge geht, spielen solche Zahlen und Mengen eine große Rolle. Noch in der deutschen Geistesphilosophie steht der Monismus gegen den Dualismus und die Dreisprünge der Dialektik, die vielleicht besser als Trialektik zu bezeichnen wäre, erst recht gegen den Nihilismus; da wird über das Nichts und das All spekuliert, über Unendlichkeit und Ewigkeit.

Nicht nur die Ansprüche einer monotheistischen Theologie („Einer nur!“) und ihre Dualismen der Fremdenfeindlichkeit („Wir, die Auserwählten, gegen die Anderen, die schon Verworfenen und zu Vernichtenden“), sondern auch die unendbare Vielfalt des Faktischen, etwa die Unzählbarkeit schon der Sandkörner am Strand, erst recht aber der Sterne am Nachthimmel, all diese Quantifizierungen stehen einander inkompatibel gegenüber. Das lässt sich nicht zusammendenken, jedenfalls nicht mit solchen extremalisierenden Begriffen und ihren „unendlichen“ Mengen- und Zahlenwerten.

So bleibt der Verdacht, dass es auch in der Cantorschen Weiterentwicklung der Mengenlehre keine bloße Sache von Zahlen oder Mengen ist, womit wir uns befassen mussten, sondern etwas ganz Anderes, zunächst noch Vormathematisches und schließlich Außer- und Nichtmathematisches, das dahinter steht. Und dieses Etwas hat weniger mit Wirklichkeiten der Welt zu tun, als vielmehr mit Eigentümlichkeiten eines sprachgebundenen Denkens, die schon seit jeher auch zu Vereinseitigungen, Übertreibungen, Über-Generalisierungen und zu den blassesten Abstraktionen geführt haben.

### 4.7.2. Zur Lebensgeschichte und Persönlichkeit von G. Cantor

Die Kaplans befassen sich auch mit dem, was Cantor selber und was Menschen, die ihn näher kannten, über seine Lebensgeschichte und über seine Persönlichkeit zu berichten hatten. Sie beginnen ihre Analyse damit, dass er „während seiner Kindheit und Jugend ... unter dem Diktat eines maßlos fordernden Vaters (stand)“ (S. 293). Sein Leben lang fühlte Cantor sich durch etwas bestimmt, „was er ... als geheime Stimme beschrieb – in ihm, über ihm, auf jeden Fall unbekannt – eine mächtige Energie, deren Sprachrohr er war“ (S. 293). Sie leitete ihn offenbar auch in seinen mathematischen Spekulationen: „Immer, wenn er eine Einsicht oder einen Beweis gebraucht hatte, war seine innere Stimme zur Stelle gewesen“ (S. 327), er fühlte sich „von einer göttlichen Stimme getrieben“ (S. 329). Das kann natürlich auch eine bildhafte Umschreibung gewesen sein für eine Intuition, einen weiterführenden Einfall, also für Erlebnisweisen, wie sie von manchen Forschern berichtet wurden, z. B. von dem Chemiker Kekulé, der über das Traumbild einer Schlange, die sich selber in den Schwanz biss, auf die ringförmige Strukturformel des Benzols gekommen war. Bei Cantor entsprachen solche sehr subjektiven Erfahrungen aber offenbar nicht nur einem spielerischen Changieren zwischen nächtlichen Traumerfahrungen und der taghellen Bewusstheit rationaler Denkvorgänge, sondern sie waren verbunden mit einigen Anzeichen für eine tiefergehende seelische Störung: Er war nicht nur herrisch unter Kollegen und humorlos in seinen Auseinandersetzungen mit anderen Mathematikern (Kaplan, S. 294), sondern „er entfremdete sich einigen Freunden, wandte sich von anderen ab“ (S. 328). Er war „störrisch ..., isoliert“ (S. 329), und „im Laufe der Jahre (hatte er sich) mit vielen seiner Kollegen überworfen“ (S. 336), und „Verschwörungen, die Cantor überall wahrnahm, brachten ihm großes Leid“ (S. 328). Er selber schrieb, Armut und Verzweiflung seien der Preis, den er für seine radikalen Auffassungen bezahlt habe (S. 328).

Das waren aber nicht nur Schrullen und Absonderlichkeiten eines etwas verschrobenen Genies, sondern schon Vorboten einer seelischen Erkrankung: „Seinen ersten ernsthaften Nervenzusammenbruch (hatte er), als er 39 Jahre alt war“ (S. 328)... „wiederholte Nervenzusammenbrüche (zwangen ihn) immer wieder zu stationären Behandlungen in Sanatorien und in der Nervenklinik der Universität Halle“ (S. 329/330) ...“immer wieder musste er stationär behandelt werden“ ... „euphorische Zustände wechselten mit immer längeren und tieferen Depressionen, hin und wieder von der Freude über verheißungsvolle Strategien unterbrochen, die jedoch alle scheiterten“ (S. 336). Das muss dem Forscher Cantor nicht als Versagen angelastet werden, denn selbst ein Einstein scheiterte in seinen jahrzehntelangen Bemühungen, die vier Grundkräfte der Physik aus einer einzigen „Weltformel“ abzuleiten, während er sich in anderen Hinsichten durchaus realitätsbezogen für die Verteidigung der Demokratie und später für die Erhaltung des Weltfriedens engagierte. Für Cantor aber wurde „die Kontinuumshypothese ... zur Zwangsidee“ (S. 329): „Hartnäckig bemühte sich Cantor, seine Kontinuumshypothese zu beweisen, derzufolge die Mächtigkeit des Kontinuums $\aleph_1$ war“ (S.336).

Cantor setzte seine hohe Intelligenz auch außerhalb der Mathematik ein, aber vornehmlich in Bereichen, bei deren Durchdringung er sich noch stärker von den Realitäten des Alltags entfernte: Er begann sich mit Rosenkreuzern, Theosophen und Freimaurern zu beschäftigen – und versuchte zu beweisen, dass Shakespeares Stücke in Wahrheit von Francis Bacon geschrieben worden waren. Dunkel deutete er an, er habe bestimmte Entdeckungen über den ersten König von England gemacht, „die die englische Regierung sicherlich in Schrecken versetzen werden, sobald die Angelegenheit veröffentlicht wird“ (S. 336).

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass Cantor nach schwieriger Kindheit und Jugend als Erwachsener wiederholt unter seelischen Störungen gelitten hat, insbesondere unter schweren Depressionen und psychosenahen Zuständen, die schließlich mehrfach klinisch-stationäre Behandlungen notwendig gemacht hatten. Das sagt natürlich noch nichts über die Qualität seiner mathematischen Ableitungen und Konstruktionen aus, die sicher nicht psychiatrisch, sondern nur mathematisch zu beurteilen sind. Das haben schon einige Mathematiker getan, und ich habe mir solche Kritik zu eigen gemacht und sie durch eigene Argumente zu stützen versucht.

Also nicht so sehr der bedauerliche Umstand, dass Cantor immer wieder depressiv und wahrscheinlich auch psychotisch dekompensierte, hat seine Urteilsfähigkeit eingeschränkt, als vielmehr eine Denkblockierung ganz anderer Art: sein fester Glaube, dass es so etwas wie „Unendlichkeit“ gibt, nämlich die Unendlichkeit Gottes. Dieser Glaube hinderte ihn daran, Allendlichkeiten und Unendbarkeiten, die schon **vor**mathematisch zu unterscheiden sind, auch mathematisch in je ihrer Besonderheit genauer zu erfassen und ihrer Verschiedenheit weiterhin Rechnung zu tragen. Dass Cantors Theorien über unendliche Mächtigkeiten fehlerhaft sind, ist natürlich nur mit logisch-mathematischen Mitteln nachzuweisen. Aber wie er dazu kam, diese Fehler zu machen und nicht zu korrigieren, das kann sehr wohl außermathematische Gründe haben!

### 4.8. Was bleibt an positiven Ergebnissen?

Die von Cantor vorgetragenen Weiterungen der Mengentheorie, vor allem seine Behauptung der Gleichmächtigkeit der Folgen von natürlichen, geraden und ungeraden Zahlen, erwiesen sich im Licht der Unterscheidung zwischen unendbaren Folgen und allendlichen Einschlussmengen als nicht mehr begründbar. Eine ins Einzelne gehende Analyse konnte zeigen, dass die sogenannte bijektive Zuordnung zwar eine immer nur auf Teilabschnitte beziehbare Mengengleichhei herstellen konnte**,** aber keine Feststellung einer Gleichmächtigkeit der verglichenen Zahlenfolgen insgesamt ermöglichte. An den Grundlagen der Mengentheorie hat sich dadurch natürlich nichts geändert; sie bilden weiterhin einen verlässlichen Grundstock mathematischer Theorie, von dem sich auch andere Teildisziplinen der Mathematik ableiten lassen.

Ich will nicht bei diesem Negativ-Ergebnis meiner Überlegungen stehen bleiben. Denn ganz allgemein sind Unendlichkeiten der einen oder anderen Art (unendbar, allendlich) sehr wohl **un**entbehrliche, wenn auch der Präzisierung bedürftige Begriffe, und im Besonderen spielt die Mengenlehre in ihren gesicherten Grundlagen durchaus eine wichtige Rolle in der Mathematik, und die Theorie der Zahlenfolgen gehört zum Grundbestand der höheren Mathematik. So kann als weiterhin voll akzeptierbares positives Ergebnis unserer Überlegungen festgestellt werden:

Erstens:

Es sollte zweierlei Sinn von „Unendlichkeit“ unterschieden werden, die **Unendbarkeit** von Folgen und die **Allendlichkeit** von sehr großen Mengen, etwa der Elementarteilchen im Weltall.

Die Unendbarkeit einer **Folge** besteht schon von ihrem Beginn an, weil sie sich aus der spezifischen Konstruktion der jeweiligen Folge ergibt. Um die Unendbarkeit einer Folge festzustellen, braucht man wirklich nicht sehr lange, schon gar nicht unendlich lange weiter zu zählen; bei dekadischen Zahlenreihen reicht es aus, nach der 10 noch bis zur Hundert und zur Hundertundeins weiterzuzählen, dann kann man sich der Unendbarkeit dieser Zahlenfolge (und damit auch aller von ihr abgeleiteten Folgen!) sicher sein.

**Mengen** dagegen sind begrenzt, so groß auch die Zahl ihrer Elemente sein mag. Eine sehr große (allendliche) Menge schließt etwa alle Elementarteilchen unseres Weltalls ein, gerade so viele, wie es zur Zeit gibt. Aber die Astronomen sind weniger daran interessiert, diese Anzahl genau zu kennen (sie kann ohnehin nicht gezählt, sondern nur geschätzt werden), sondern eher daran, die Relationen zwischen der Masse baryonischer Körper im Weltall, ihren Bewegungsrichtungen, ihren Ausbreitungsgeschwindigkeiten, ihrem jeweiligen Entstehungsalter (Entstehung nicht aus Nichts, sondern etwa aus Gaswolken) und anderen Parametern immer genauer einzuschätzen.

Die Konfundierung, unkritische Gleichsetzung und häufig auch Verwechslung dieser beiden „Unendlichkeiten“ sollte als gedankliche Falle erkannt werden, über die man aufklären sollte (Vorsicht! Lehrer haften für ihre Schüler!), und in die dann hoffentlich keiner mehr unbedacht hineintappt.

Zweitens:
Es gibt **Zahlenfolgen**, die **unendbar** sind. Das können schon Schüler wissen, wenn sie das Prinzip des Weiterzählens richtig verstanden haben. Um es noch deutlicher zu machen: selbst verglichen mit der so unfassbar großen, aber plausibel einschätzbaren Zahl <u>aller</u> Elementarteilchen (im wesentlichen: Quarks und Leptonen) in unserem Weltall gibt es doch noch beliebig mehr natürliche Zahlen. Es gibt sie? Nein, man kann sie bilden, immer noch viel viel mehr als alles Zählbare, beliebig mehr als alles Denkbare, mehr als Alles. Nicht weil es diese Zahlen in so großer Menge wirklich gäbe, sondern weil man sie beliebig größer bilden **könnte**. Im Unterschied zu Elementarteilchen, die es in großen Mengen auch ohne Zutun von Menschen, ja schon vor dem ersten Auftreten der Menschen gab, gibt es Zahlen erst und nur, seit sie von Menschen gebildet wurden, und nur so lange, wie Menschen dies weiterhin tun. Zahlen sind Gedachtes, Konstruiertes und unendbar weiter Konstruierbares.

Was die fragliche „Mächtigkeit“ solcher Folgen, genauer: Teilfolgen (bis zum Stop) betrifft, so sind die (ab 1) ungeraden und die (ab 2) geraden Zahlen gleichmächtig, und im Vergleich mit ihnen sind die natürlichen Zahlen, aus denen sie, einander abwechselnd, generiert worden sind, „doppelt mächtig“. Aber abgesehen von dieser Trivialität sind diese drei Arten von Zahlenfolgen gleichermaßen unendbar, und zwar jeweils schon von Anfang an, und das ist nicht trivial, sondern mathematisch bedeutsam. Diese Aussagen zusammenfassend kann gesagt werden, dass in der Folge der natürlichen Zahlen, von der 1 angefangen, die ungeraden und die geraden Zahlen bis zu einem beliebig weit entfernten Stop gleich häufig auftreten, und dies bis in alle Unendbarkeit der Folgen. Da diese Aussage wie schon gesagt trivial ist, habe ich sie nur der Klarheit und Vollständigkeit des Gedankengangs wegen ausformuliert.

Drittens:

Dagegen ist kein vernünftiger Zweifel daran möglich, dass sich im Intervall zwischen je zwei benachbarten natürlichen Zahlen, etwa der vorausgehenden 1 und der nachfolgenden 2, und entsprechend in anderen solchen Intervallen (auch zwischen 0 und 1, zwischen 0 und –1, etc.), neue Unendbarkeiten von Zahlen auftun. Das sind einmal die darin vorfindbaren unendbar vielen Brüche wie ½, ⅓, ¼ etc. zwischen 0 und 1, und entsprechend solche zwischen allen anderen benachbarten natürlichen Zahlen, zum anderen die unendbaren Dezimalbrüche (Dezimalzahlen mit ggf. unendbar vielen Ziffern rechts vom Komma). Beide Fälle kann man zwar nicht als endliche Einschlussmengen betrachten, weil sich nämlich, zwar zwischen je zwei benachbarten natürlichen Zahlen abgegrenzt, dennoch beliebig weitere Elemente der genannten Zahlenarten in einem solchen Intervall generieren lassen. Diese werden aber, für jeden Mathematiker und erst recht für Laien klar ersichtlich und plausibel, daher unendbar „häufiger" auftreten als die natürlichen Zahlen selbst, in deren Folge sie eingeordnet sind. In der unendbaren Folge der natürlichen Zahlen können somit weitere Unendbarkeiten enthalten sein, die allerdings ihrerseits wiederum nicht als „unendliche Mengen" bezeichnet werden sollten, sofern die zwischen den natürlichen Zahlen eingeschlossenen Elemente nur gleichermaßen unendbar fortgesetzt werden können. Es können diesen Elementen jedoch, allerdings nur in diesem eingeschränkten Sinne, relativ größere „Mächtigkeiten" als den sie einschließenden natürlichen Zahlen zugesprochen werden. Für Mengen, die aus bestimmten unendbaren Folgen bestehen, genauer: denen die quids aus bestimmten unendbaren Folgen zugeordnet werden können, bietet sich dann der allgemeinere Begriff des **„set"** an, der sich auf die Verdeutlichung der Zuordenbarkeit beschränkt und sich jeder Unendlichkeits-Spekulation enthält. So könnte als vorläufiges Gesamtergebnis meiner Überlegungen das Ziel anvisiert werden, dass die „Mengenlehre" nicht in einer vagen Infinitologie gipfeln sollte, sondern viel präziser als „set theory" verstanden und weiter ausgebaut werden könnte. Als Beitrag zu einer mathematischen Fundierung oder auch nur Stützung einer pluri-relationalen Philosophie wäre sie dann gut geeignet!

Was lässt sich als **Gesamtergebnis** unserer im Einzelnen recht diffizilen Analysen festhalten? Als erstes hat sich die Unterscheidung zwischen unendbar und allendlich bewährt, um die in der Geistesgeschichte so unterschiedlichen Ansätze zur begrifflichen Erfassung der Unendlichkeiten besser zu verstehen und einzuordnen. Vor allem die aristotelische Unterscheidung zwischen dem potentiell Unendlichen und dem aktual Unendlichen kann mit der von mir vorgeschlagenen Begrifflichkeit sowohl bestätigt als auch noch stringenter formuliert werden. Als zweites hat sich bei der genaueren Analyse mathematischer Folgen gezeigt, dass deren Konstituierung und Verwendung erst mit dem Hinweis auf ihre Unendbarkeit voll verständlich wird. Schließlich hatte auch die Diskussion über „naive" Mengentheorie von der von mir vorgeschlagenen Begrifflichkeit profitiert. Der naive Mengenbegriff der klassischen Mengentheorie kann, sprachlich präzisiert, als Theorie über die Zuordnung von qualitativ vergleichbaren „Quids" zu übergeordneten „Sets" formuliert werden, um dann auch als begriffliche Basis genutzt zu werden, um Extremalisierungen in Richtung auf „Allendlichkeiten" verständlich zu machen.

## 4.9. Exkurs: Über endliche Iterationen in der Sexualität der Menschen

Im speziellen Zusammenhang mit den Problemen der Unendlichkeiten gehört die Sexualität, dieser wichtige Bereich menschlichen Handelns und Erlebens, meiner Einschätzung nach unmittelbar in die Diskussion über „Wiederholungen und Fortsetzungen". Man kann nämlich am Beispiel der Sexualität genügend überzeugend demonstrieren, dass deren zeitlich begrenzte Wiederholungen etwas sehr Gutes und Beglückendes sein können. Die menschliche

Sexualität mit ihren in ihrer Endlichkeit dennoch lustvollen Wiederholungen soll im Folgenden als scharf kontrastierendes Gegenbeispiel zur Ewigkeit und Allmacht und zu den anderen theologisch-philosophisch extrem übersteigerten Allendlichkeiten des jüdisch-christlich-islamischen Monotheos, und auch zu theologisch inspirierten, gleichermaßen blutleeren „Mächtigkeiten“ (!) der Cantorschen Mengenlehre, eingehender beschrieben werden. Schon wegen der zweifellos großen und so positiven Eigenbedeutung der Sexualität im Leben der Menschen, aber auch weil sie von der Theologie bis in die Gegenwart als Ur- und Erbsünde verteufelt und von so manchem Philosophen seit alters her verschwiegen oder umgangen worden war, verdient sie eine umfassende und ernsthafte Analyse, die in anderem Rahmen und an anderer Stelle meiner Website noch erweitert werden soll. Bis dahin soll der Diskussion über dieses Thema vorläufig, hier und jetzt, ein genügend großer Platz eingeräumt werden.

Den Beweis für die eben vorgebrachten Behauptungen zu führen, ist eigentlich nicht schwer. Nur, in welcher Form sollte er vermittelt werden? Ich meine, dass dies in einer der Sexualität angemessenen, nämlich gleichfalls sinnlichen Sprache erfolgen sollte. Mir geht es also im Folgenden darum, Sexuelles zu thematisieren, ohne auf Genauigkeit zu verzichten oder unzweifelhaft Sinnliches wegzuabstrahieren. Bei diesem Vorhaben bin ich mir des Risikos bewusst, mit manchen Formulierungen unbeabsichtigt in seichten Kitsch oder aber ins grob Pornographische abgleiten zu können. Wenn mir also das, was ich mir vorgenommen hatte, im Einzelnen nicht so recht gelungen sein sollte, bitte ich um Korrekturvorschläge, auch und vor allem von Seiten der Frauen, die in ihrer Nähe zum eigenen Körper und zu dem ihrer Kinder in manchen Dingen erfahrener sind und denen es gegeben ist, dafür feinfühlig das nicht nur passendere, sondern auch freundlichere Wort zu finden.

Um die Bedeutung der Wiederholungen in der Sexualität verständlich zu machen, muss ich etwas ausholen und an eine weiter oben durchgeführte Darlegung anknüpfen. Ich hatte die Analyse von Fortsetzungen und Wiederholungen im Reich des Lebendigen, zunächst bei Pflanzen und Tieren, an einer Stelle abgebrochen, wo es gerade spannend und sogar erregend hätte werden können: als ähnliche Phänomene beim Menschen in den Blick kamen, insbesondere im Bezug auf sein sexuelles Erleben und Verhalten. Anlass für diesen Abbruch war die Befürchtung und schließlich Erfahrung, dass eine in diesen „heiklen“ Bereich führende Diskussion den Rahmen der auf Mathematisches zentrierten Analyse der Unendlichkeiten hätte sprengen bzw. den einen oder anderen Leser am Weiterlesen hätte hindern können. Nachdem die Abhandlung der im engeren Sinne mathematischen Problematik (einschließlich der sprachlichen und logischen Fallstricke) ihren vorläufigen Abschluss gefunden hat (Korrekturvorschläge sind weiterhin erwünscht!), verfolge ich die zuvor verlassene Spur jetzt weiter und befasse mich nun doch, und zwar ganz ausdrücklich und ohne falsche Scheu, mir dem vorher nur angedeuteten Thema der menschlichen Sexualität.

Vieles von dem, was in einem früheren Abschnitt über Tiere ausgesagt wurde, ist so oder ähnlich auch beim Menschen, der dies aber im Unterschied zum Tier bewusst wahrnehmen, selber wollen oder unterlassen und mit Worten beschreiben kann. Wir erleben bewusst den Wechsel von Wachheit und Müdigkeit, schon am Tage und mehr noch im Wechsel von Tagesaktivität und Nachtruhe, bis zur fast völligen Entspannung. Wir erinnern uns an die Wiederkehr der Jahreszeiten, erleben das Älterwerden an Tieren und Bäumen, an anderen Menschen und an uns selbst, bei allen – bei wirklich jedem ohne Ausnahme – eingespannt zwischen Geburt und Tod. Wir Menschen können unseren Herzschlag spüren, unsere Atmung und unsere Ernährungs-, Verdauungs- und Ausscheidungs-Funktionen und auch die genitale

Sexualität bewusst erleben und sie zum Teil hemmen und auch verstärken, besser: steuern, und einige solche Antriebe auch ästhetisch gestalten, zivilisieren und kultivieren.

Auch unsere Fortbewegung (das Gehen, Laufen, Rennen, Springen, Klettern, Schwimmen) ist zielorientiert steuerbar, sie kann spielerisch variiert werden, etwa im Hüpfgang der Kleinkinder, und sie kann rhythmisch und synkopisch strukturiert werden im Tanz, begleitet von gesanglich oder auch instrumental wiedergegebenen Melodien, eine Strophe nach der anderen, mit immer neuem Text unterlegt. Unsere Sprache ist ein höchst variationsreiches Anreihen und Wiederholen von mehr oder weniger differenzierten Lautfolgen der Wörter und Sätze, wiederum rhythmisiert im Gedicht und dramatisch ausgestaltet im Märchen, typischerweise vom Anfang („Es war einmal ...) über mehrere seltsame Geschehnisse bis zum Ende (... wenn sie nicht gestorben sind“), und auf vielfache Weise künstlerisch erweitert und ausgestaltet bis zum Epos und heutzutage zum großen Roman. Es gibt also innerhalb der (fast) unendbaren Wiederholung des (fast) Gleichartigen, das für das Leben ganz allgemein charakteristisch ist, immer auch Teilfolgen oder –reihen, die einen Anfang und ein Ende haben.

Um die Bedeutung von Iterationen für die Sexualität der Menschen besser einschätzen zu können, sollten wir uns zuvor allgemeiner mit dem Geschlechtsunterschied zwischen Mann und Frau befassen. Zwar heißt es, dass alle Menschen gleich seien, aber tatsächlich sind Männer und Frauen verschieden, und das ist gut so. Vive la différence! Bei aller Menschenähnlichkeit beider Geschlechter, und das gilt für beide gleichermaßen, unterscheiden sie sich untereinander schon in Hinsicht auf ihre Geschlechtsorgane, aber darüber hinaus auch in vielen anderen Hinsichten, sogar bis in die spezifische Ausprägung von Intelligenzfaktoren. Frauen sind nun einmal im Durchschnitt sprachlich begabter als Männer. Die Männer können diesen Mangel allerdings durch eine größere Fähigkeit im Umgang mit Formen und räumlichen Beziehungen einigermaßen kompensieren.

Der **Geschlechtsdimorphismus** beim Menschen betrifft aber insgesamt eher körperliche Merkmale und kann je nach Population unterschiedliche Ausmaße erreichen. Allgemein gilt: Frauen sind im Durchschnitt kleiner als Männer. Häufig genug, um nicht als abnorm aufzufallen, gibt es Paare, bei denen die Frau aufrecht unter dem ausgestreckten Arm ihres Mannes durchgehen kann. Wenn sie im Stehen oder Gehen mit ihm spricht, kann sie den Blickkontakt mit ihm nur aufrechterhalten, indem sie zu ihm aufschaut, was sie darum auch immer wieder tut. Der umgekehrte Fall, dass die Frau um ebenso viel größer ist als der Mann, und er zu ihr aufschaut, ist sehr viel seltener.

Es gibt aber Populationen, etwa in SO-Asien, in denen die Männer und Frauen einander in Körpergröße, Gestalt, Behaarung und Gesichtszügen ziemlich ähnlich sind, bis auf die primären Geschlechtsmerkmale. Da die afrikanischen Tropen als Urheimat der Menschen gelten können und diese sich wohl als erstes über ähnliche Biotope in Südasien bis nach Indonesien ausgebreitet hatten, kann spekuliert werden, ob bei diesen Populationen der Geschlechts-Dimorphismus **noch** keine höheren Ausmaße erreicht hatte. Das geschah anscheinend erst wieder in nördlicheren Bereichen von Eurasien, vor allem in Mittel- und Nordeuropa, wo sich auch schon in vorhistorischen Zeiten Unterschiede zwischen den - Großsäuger jagenden - hünenhaften Männern und ihren relativ kleineren Frauen herausgebildet hatten. In unseren Ballungszentren, in Großstädten bis zur Megapolis, gibt es inzwischen Misch-Populationen, in denen die Männer eher als jungenhaft erscheinen und den Frauen wieder ähnlicher geworden sind, und beide Geschlechter auch als Erwachsene noch juveniler und sogar kindlicher wirken als anderswo im Hinterland.

Geschlechts-Dimorphismen zeigen sich auch in anderen Hinsichten: Frauen haben im Durchschnitt eine höhere Stimmlage und hellere Stimme als Männer, was sich bei Chören und Solisten in der so geläufigen Unterscheidung zwischen einerseits dem Sopran, Mezzosopran und Alt der Frauen, und anderseits dem Tenor, Bariton und Bass der Männer ausdrückt, mit der Ausnahme, dass Männer mit Falsett-Stimme auch Sopranpartien übernehmen konnten, während der weibliche Bass schon recht ungewöhnlich wäre. Nicht nur weiblich, sondern auch etwas kindlich wirkt die hohe Stimme der Soubrette, der Sängerin heiterer, mädchenhaft-naiver Sopranpartien in Oper und Operette, deren Stimme manchmal leicht nasaliert klingt wie bei einem kleinen Mädchen, das gerade Schnupfen hat. Im Unterschied zu der oftmals etwas monotonen Stimmführung von Männern können Frauen ihre klangvollere Stimme besser modulieren und in unterschiedlichen Stimmlagen einsetzen: wenn eine Frau die zärtliche Zuwendung ihres Mannes in ihrer Weise beantwortet, kann ihre Stimme noch heller und weicher werden, so als sei sie regressiv in eine kindliche Sprechweise zurückgefallen. Wenn Mütter mit ihrem Baby oder Kleinkind sprechen, fallen sie in eine höhere Stimmlage mit weicherer Artikulation, und auch Fremde tun gut daran, ihr in dieser Weise nachzufolgen, wenn sie Kontakt mit einem so kleinen Wesen aufnehmen wollen. Denn die im allgemeinen hellere und ohnehin leisere Stimme der Frau kommt beim Neugeborenen besser an als die tiefere und oftmals lautere Stimme des Mannes. An den groben Bass seines Vaters muss sich das Baby erst gewöhnen. Die höhere Stimmlage der Frauen korreliert überdies mit ihrem beim Sprechen typischen Ausdrucksverhalten: Mädchen und Frauen sehen ihr Gegenüber beim Sprechen lächelnd an, ihr Reden ist über längere Strecken von Lächeln begleitet, im deutlichen Unterschied zu den eher ernster vor sich hin sprechenden Jungen und Männern. Besonders in der Vorpubertät kichern und giggeln Mädchen gern, und ihr Miteinanderreden ist häufiger vom Lachen und Mitlachen unterbrochen.

Nicht nur in Hinsicht auf ihre Größe, Stimmlage und Sprechweise sind Frauen den Kindern näher als die Männer. Frauen haben, auch darin den Kindern ähnlicher, eher ein weich seidiges Haar, eine weitgehend unbehaarte und reinere Haut, weichere Gesichts- und Körperformen. Wie schon kleine Mädchen gern spontan in einen „Hüpfgang“ fallen, deutlich mehr als kleine Jungen, sind auch erwachsene Frauen eher diejenigen, die sich, ob einzeln oder zu zweit, auf dem Tanzparkett einfinden. Beim Karneval sind sie einfallsreicher, sich zu verkleiden, zu schminken, zu maskieren, und eine von ihrem sonstigen Verhalten abweichende Rolle zu spielen, was sie schon als kleine Mädchen gern getan haben. Das alles zusammengenommen spricht dafür, dass bei der Menschwerdung das weibliche Geschlecht den Männern bei der gegenüber den äffischen Vorfahren deutlichen Verkindlichung (Neotenie, vgl. Adolf Portmann und seine Theorie des „extra-uterinen Frühjahrs“) vorangegangen ist.

Bei den bislang angeführten Unterschieden zwischen Frauen (Mädchen) und Männern (Jungen) war von ihrem Hauptmerkmal, den unterschiedlichen Geschlechtsorganen (Genitalien), noch gar nicht die Rede. So wichtig die primären Geschlechtsmerkmale für das Zeugen und neun Monate später für das Gebären eines Nachkommen sind, so machen sie doch nicht schon für sich genommen die sexuelle Attraktivität der Geschlechter aus. Denn wenn das so wäre, müssten Mädchen und Frauen positiver auf männliche Exhibitionisten reagieren, und Männer müssten ihre Schaulust mehr auf den ohnehin versteckten Scheideneingang als auf die weiblichen Brüste und Pobacken richten. Schon bei den meisten Säugetieren kommen die primären Geschlechtsmerkmale, die Geschlechtsorgane, erst **nach** einer mit der Balz eingeleiteten Paarbildung, also insofern sekundär ins Spiel. Vielmehr sind es die sogenannten sekundären Geschlechtsmerkmale, die für die sexuelle Attraktivität von Frauen und von Männern zumindest zeitlich primär sind, insofern sie die Geschlechter erst einmal aufeinander aufmerksam machen, einander anziehen (attrahieren!) und schließlich zusammenführen.

In und an hinduistischen Tempeln wird dem frommen Betrachter vor Augen geführt, was an den Geschlechtern attraktiv ist: bei den Frauen und insbesondere Göttinnen die vollen Brüste noch mehr als die wohlgerundeten Hüften und Pobacken, schon gar nicht die offene Schamspalte, sondern eher noch das so ansprechende weiblich-kindliche Gesicht und die anmutige Haltung (im Tanz: die noch anmutigere Bewegung), bei den Männern und Göttern die athletische Gestalt, die breiteren Schultern, die aufrechte Haltung und das imponierende bis kriegerische Gehabe, und nicht schon das steife Glied. Dieses kann jedoch in anderem Kontext sehr wohl eine stille religiöse Verehrung als steinerner „Lingam" erfahren, der von andächtigen Frauen mit flüssiger Butter gesalbt wird.

Auch der in Ägypten und anderswo immer noch (bei uns inzwischen: auch schon) gepflegte „Bauchtanz" ist eine höchst ansprechende Darbietung des gesamten weiblichen Körpers in anmutigen Bewegungen, die neben den Hüften und Brüsten eher als Zugabe auch den Bauch mit seinem bei der Frau tiefen Nabel, schön geschmückt, einbeziehen, aber keineswegs den Scheideneingang präsentieren. Dieser ist vielleicht auch angenehmer mit dem steifen Glied zu ertasten (usw.), als mit dem Blick zu betrachten. Da gibt es nicht viel zu sehen.

Ich habe in einem früheren Abschnitt die Nähe der Frau zum Kind diskutiert, und dann auch erwähnt, dass kindliche Züge einer Frau den Mann sehr positiv ansprechen können. Die Autoren B. Fink, K. Grammer und P. Kappeler haben diesen Aspekt unter dem Titel „Zum Verlieben schön" (Spektrum der Wissenschaft, Nov. 2006, S. 28 – 35) wissenschaftlich näher untersucht. Sie gehen der Frage nach, warum Männer und Frauen überhaupt so verschieden aussehen – nicht nur gesamtkörperlich, sondern auffallenderweise auch in ihren Gesichtern. Sie gehen davon aus, dass wir schon niedlichen, hübschen Kindern im allgemeinen freundlicher begegnen. Dazu ist zu sagen, dass wir darüber hinaus die Wörter „niedlich" und „hübsch" eher auf  Frauen als auf Männer beziehen. Ein als „niedlich" bezeichneter General würde sich nicht geschmeichelt fühlen, ein Filmsternchen schon eher. Die Autoren referieren als Ergebnis empirischer Untersuchungen, dass Beurteiler bei Fotos der Gesichter von Frauen bevorzugt solche Gesichtsmerkmale als positiv einschätzen, die in das „Kindchenschema" (Konrad Lorenz) passen: etwa eine hohe Stirn, große, weit auseinanderstehende Augen, eine eher kleine Nase, ein wenig ausgeprägtes Kinn, volle Lippen. Es wurde angenommen, dass solch ein kindliches Aussehen die Attraktivität von Frauen für Männer erhöht, weil es deren Beschützerinstinkte weckt und zugleich eine gewisse Fügsamkeit der Partnerin signalisiert. In Erweiterung dieses Ansatzes stellten die Autoren jedoch fest, dass noch höhere Punktwerte von Gesichtsmerkmalen erzielt wurden, die zusätzlich die Reife und das Erwachsensein der Frau anzeigten, nämlich (die im Unterschied zu den pummeligen „Pausbacken" kleiner Kinder bei der Frau) strafferen Wangen, die (unter geringer Bemuskelung und zarter Haut) die Wangenknochen noch erkennen lassen: „Das aber kennzeichnet erwachsene Frauen. Das heißt, ein ideales Frauenantlitz besitzt sowohl kindliche als auch Erwachsenenmerkmale" (S. 33).

Dieser Typ der „Kindfrau" spricht Männer offenbar besonders an; er wird deshalb in Operette, Musical und Film, in Mode und Werbung bevorzugt als Blickfang angeboten. Da aber das, womit geworben wird, oftmals viel besser ist als das, für welches es werben soll, ziehe ich die schöne Frau dem Auto vor, an das sie sich mit all ihren Reizen anlehnt. Solche Autoreklame mag ich: sie wirbt für schöne Frauen! Aber zurück zum Thema: Mädchen und junge Frauen wecken bei Männern nicht nur männliche Besitzer-Wünsche, sondern auch väterliche Beschützer-Neigungen, und Kindfrauen können selbst hartgesottene Männer zu

Zärtlichkeiten verlocken. Sie wirken zumindest so, als ob sie sich gern beschützen ließen, eher Hilfen annehmen würden, und sie können mit einigem bewussten Zutun „die Kleine" spielen. In Paarbeziehungen dürften sie nach Meinung mancher Männer fast beliebig jünger als diese selbst sein („Lolita"), und auch in dieser Hinsicht ist die Umkehrung (die ältere Frau mit ihrem Lustknaben) eher die Ausnahme. Aber die „Kindfrauen" sind dennoch nicht eigentlich kindlich. Sie sind nur, verglichen mit dem Mann, **relativ** näher zum Kind, ihm ähnlicher, aber dennoch auf ihre Weise durchaus erwachsen.

Um den im Folgenden dargestellten Befund der Autoren der gleichen Autoren besser einordnen zu können, sollten wir uns kurz mit einem bedeutsamen biologischen Zeitgeber befassen, der auch für die menschliche Sexualität von großer Relevanz ist: es ist der regelmäßig wiederkehrende Menstruations-Zyklus der Frau. Das lateinische Wort menstruus („monatlich") ist von lat. mensis abgeleitet, gleichermaßen mit „Monat" und „Monatsblutung" übersetzbar. Im Deutschen stammt das Wort „Monat" und auch „Mond" aus der gleichen Wurzel, was sinnfällig zum Ausdruck bringt, dass der Mond, der Himmelswanderer, schon zu alten Zeiten als Zeitmesser diente. In etwa gleichem Zeitabstand wie der Wechsel vom Vollmond über den Halbmond zum Neumond und wieder zurück, nämlich „regel"mäßig alle 28 Tage, kommt es bei Frauen im – zumindest prinzipiell – gebärfähigen Alter (in neuerer Zeit vom 12./13. bis zum 50. Lebensjahr) zur Monatsblutung („die Regel", „die Tage", „die Periode"). 14 Tage vorher wird beim Eisprung ein befruchtungsfähiges Ei in den Eileiter freigegeben, so dass in dieser Zeit die größte Chance für eine Befruchtung durch die männlich Keimzelle (das Spermium) besteht. Wenn es nicht zur Vereinigung von Ei und Samenzelle und damit zur Befruchtung und dem Beginn der Schwangerschaft kommt, wird die zuvor zur Einbettung des Eis aufgequollene und reich durchblutete Schleimhaut der Gebärmutter abgestoßen, was zur Monatsblutung führt. Die Menstruation kann auch mit Kreuzschmerzen, Unterleibsbeschwerden und allgemeiner Nervosität verbunden sein, was zu dem weiteren Synonym „monatliches Unwohlsein" beigetragen hat.

Für unsere Fragestellung interessant ist nun das erst in neuerer Zeit erforschte Phänomen, dass die Attraktivität von Männern (speziell von männlichen Gesichtszügen) für Frauen einem bemerkenswerten Wechsel unterliegt, und zwar parallel zu ihrem Menstruationszyklus. Ich referiere im Folgenden wieder aus der Arbeit von Fink, Grammer und Kappeler: Was man als männlich-markante, maskuline Züge zu bezeichnen pflegt, ein kräftiges Kinn oder kantige Gesichtszüge, wird von Frauen besonders in der für eine Empfängnis günstigen Phase ihres Zyklus bevorzugt. Sie wünschen sich dann anscheinend „nach Dominanz strebende Hormonprotze" (S. 35). Ein markantes männliches Gesicht signalisiert Maskulinität und daran gekoppelte vitale und zugleich auch mentale Eigenschaften, die sich in Konkurrenzsituationen bewähren: nämlich Durchsetzungsfähigkeit und eine Tendenz zur Dominanz, was in Kombination einen hohen sozialen Status bedingen kann. Männer müssen auch stärker mit Männern um Frauen konkurrieren als umgekehrt. Sie sollten aus Sicht der Frau sie selbst und den Nachwuchs beschützen, Nahrung beschaffen, überhaupt Ressourcen gewinnen können. Attraktiv sind für Frauen in dieser Phase des Menstruationszyklus besonders solche Männer, deren Gesichtszüge solche Eigenschaften versprechen.

Und nun der überraschende Wechsel: Zu den anderen Tagen ihres Zyklus, an denen ihr Körper weniger oder gar nicht empfängnisbereit ist, bevorzugen Frauen eher nicht ganz so markant aussehende Männer, schätzen bei diesen etwas weichere, gewissermaßen femininere Gesichtszüge: "Man könnte sagen, sie wünschen sich dann verträgliche, wirkliche Partner" (S. 35), und ich ergänze: mit denen sie sich auch im Gespräch gut verständigen können, so wie sie es im Umgang mit ihren Geschlechtsgenossinnen gewohnt sind. Aber insgesamt orientieren sich Menschen bei der Partnerwahl immer noch weitgehend unbewusst an ungelernten Schemata, die im Grunde auf das eine biologische Ziel hinlenken: dass Partner sich möglichst perfekt dazu eignen, den Wunsch nach Kindern zu erfüllen.

Nach diesem Exkurs über Auswirkungen des so iterativen Menstruationszyklus will ich mich im folgenden mit noch anderen Iterationen (Wiederholungen) befassen, die für die menschliche Sexualität charakteristisch sind. Dazu gehören auch die jede Nacht während des Schlafs mehrfach wiederkehrenden Traum- und zugleich Erektionsphasen, die uns schon in der Pubertät auf die interpersonale Realisierung sexueller Antriebe vorbereiten helfen. Dazu gehören natürlich auch soziale Beziehungen, von ihrer Stiftung (z. B. im Bund der Ehe) bis zu ihrem Ende (auf jeden Fall irgendwann „bis dass der Tod euch scheidet"), und innerhalb auch von zeitweiligen Paarbeziehungen das Wunder der intimen sexuellen Begegnung und Vereinigung. Das sinnliche Küssen der Verliebten hat lebensgeschichtliche Vorläufer, schon nach der Geburt aufkommend, wenn der Säugling, auf dem Arm seiner Mutter an ihrer Brust gut geborgen, offensichtlich lustvoll rhythmisch saugt und trinkt an ihrer von seinem zahnlosen Mündchen voll umfassten Brustwarze, die er erst mit dem Sattsein und Einschlafen wieder loslässt. „Brustwarze"? Was für eine hässliche Bezeichnung für so etwas Gutes! Man sollte sie eher Brustknospe nennen, denn liebevoll behandelt kann sie noch etwas wachsen, auch wenn sie erst für das saugende Neugeborene sich vielfach öffnet und ihm bekömmliche Milch liefert. Mit dieser Nahrungsquelle, ohne Umstände verfügbar, kann ein Säugling gedeihen und erste positive Lebens- und sogar im engeren Sinne Liebeserfahrungen machen. Das Saugverhalten, später auch ohne zu trinken, wird oftmals noch viele Jahre fortgesetzt in dem von Sigmund Freud so treffend benannten „Wonnesaugen", dem Lutschen am eigenen Daumen oder Finger. Es ist inzwischen bei vielen Säuglingen und Kleinkindern denaturiert zum Dauerlutschen am zunächst noch sauberen und dann mehrfach herunterfallenden Gummisauger, mit dem heutzutage gestresste Mütter und Väter ihren quengelnden Sprössling auf längere Dauer „zustöpseln" können, statt dass jemand sich in dieser Zeit liebevoll und freundlich zugewandt mit dem Kleinen beschäftigt.

Spätestens im Verlauf der Pubertät können Jungen entdecken, dass ihr ansonsten eher schlapp herunterhängender Pimmel tagsüber und vor allem während des nächtlichen Schlafs häufiger steif wird und begleitet von seltsam sinnlichen Träumen schließlich einen leicht schleimigen Saft ausspritzen kann. Sie können auch herausfinden, dass sie ihr Glied durch eigenes Zutun zu einem Ziel und Mittel verschwiegener Lüste machen können. Wenn der Junge seinen Pimmel freundlich mit der eigenen Hand umfasst und wie spielerisch streichelt und sachte massiert, kann er ihn, dazu angetrieben durch ein zunehmendes Gefühl einer ganz neuartigen Erregung, eigenhändig dazu bringen, steifer und schließlich ganz steif zu werden. Es könnte sein, dass der Junge eine Gelegenheit findet, nicht nur heimlich im Dunklen unter der Bettdecke, sondern am helllichten Tage ungestört mit seinem Glied zu spielen, es in der hohlen Hand zu massieren und voller Erregung sein Größerwerden nicht nur zu spüren, sondern auch zu sehen, was sich da tut. Er könnte ganz beeindruckt davon sein, wie groß sein Glied schließlich geworden ist, wie sich dabei die ansonsten die Eichel bedeckende Vorhaut wie von selbst zurückzieht und schließlich das knubbelige Endstück seines Glieds, die Eichel, vollends freigibt. Diese zeigt sich bald in ganzer Größe als Krone des angeberisch freistehenden Glieds, nackt und aufrecht wie ein nach dem Sommerregen aufgeschossener Ständer- oder Hutpilz, der auf seinem stämmigen Stiel einen prächtigen Hut trägt. (Kaum ein Junge weiß, dass in der Antike der jedermann vertraute freistehende „Phallus" in den ithyphallischen Bildern und Statuen zum religiösen Symbol der Fruchtbarkeit überhöht wurde, und fast karikaturistisch übertrieben als im Hausgiebel angebrachter Abwehrfetisch diente). Die auf diese Weise freigelegte Eichel wird unter ihrem Rand immer empfänglicher für höchst sinnliche Empfindungen, die der Junge durch ein weiter fortgesetztes und intensiver werdendes Massieren des Glieds sich selber verschaffen kann. Durch diese Massage wird auch die schon zurückgezogene Vorhaut vor- und zurückgeschoben, und dies überträgt sich auf ein unscheinbares, aber sexuell überaus empfindsames Hautbändchen, das Frenulum, mit dem die Vorhaut im Winkel vorn unter den Eichelrändern ansetzt, und übt damit einen unwiderstehlichen Anreiz zum Weitermachen aus. Dadurch wird die sexuelle Erregung des masturbierenden Jungen weiter gesteigert und das ganze so sinnliche Tun schließlich belohnt von dem zunächst völlig unerwarteten Ausspritzen (Ejakulieren) der Samenflüssigkeit, begleitet von der bisher noch nie so erfahrenen höchsten Lust des Orgasmus, die dann abklingt in eine im besten Falle als befreiend erlebte Lösung der aufgestauten Triebspannung.

So raffiniert und doch so sicher wirksam hat die biologische Evolution bis zum Menschen diese ineinandergreifenden Vorgänge eingerichtet, und dies zunächst zu dem einzigen Zweck, zur Begattung der Sexualpartnerin und Befruchtung einer Eizelle zu führen und damit zur Fortpflanzung der Art beizutragen. Dies alles funktioniert daher auch ganz ohne nähere Kenntnis der komplexen Zusammenhänge, und zwar bis heute im Regelfall bei der sexuellen Vereinigung eines Mannes mit einer Frau. Wir sollten für dieses biologische Erbe dankbar sein und es nicht nur zu der doch so wünschenswerten Erhaltung der Menschheit nutzen, sondern auch immer wieder, so bald und so lange es geht, zum eigenen und gemeinsamen Lustgewinn. Und kein Pfarrer und auch kein sexuell missgünstiger Gott selber sollte uns dieses Hochgefühl vermiesen oder gar verbieten wollen, auch nicht dem pubertierenden Jungen, der seine ersten Erfahrungen damit gemacht hat.

Diese biologischen Vorgänge funktionieren also schon beim bewusst praktizierten Masturbieren zur Selbstbefriedigung des pubertierenden Jungen oder in anderen sexuellen Notlagen, erst recht auch beim spielerisch-neugierigen und einander aufreizenden „Petting“ verliebter Jugendlicher, und schließlich bei der intimen Vereinigung der einander liebenden Lebenspartner. Jugendliche können aber über längere Zeit dabei bleiben, sich diese Befriedigung selbst zu verschaffen und sich auf dem Weg zu ihr sexuelle Phantasien auszumalen, die sie später in Partnerbeziehungen umsetzen können, in dieser oder auch anderer Weise. Der Junge kann dann schon ahnen und herauszufinden versuchen, sogar schon wünschen und eine Gelegenheit suchen, um sein steifes Glied in der ihm zunächst noch völlig unvertrauten Scheide einer Sexualpartnerin, welcher auch immer, selber hin und her zu bewegen, um dabei und am Ende ein noch sinnlicheres Höchstgefühl zu erleben. Aber das kann ihm, aus einigen sogar guten Gründen, nämlich damit er in einem Mindestmaß erwachsen werden und sich sozial verantwortlich verhalten kann, noch längere Zeit versagt bleiben, möglichst nicht allzu lange. Auch ein Mädchen kann sein sexuelles Lustzentrum, die Klitoris, schon vor jeder Partnerbeziehung selber entdecken und dann mit eigenem zärtlichen Zutun vielleicht sogar leichter zum Orgasmus kommen als durch die vielleicht unzureichenden Bemühungen des späteren Sexualpartners. Aber zunächst wird sein Gefühlsleben meist noch stärker vom Sichschönmachen und Sichzeigenwollen, vom Schwärmen für Jemanden und von Träumereien über das große Glück bestimmt. Auf jeden Fall sollte das junge Mädchen durch eine bei beiden jugendlichen Partnern ausreichende Kenntnis und dann auch effektive Praxis der Empfängnisverhütung vor einer ungewollt vorzeitigen Schwangerschaft bewahrt bleiben, denn eine gute Schul- und Berufsausbildung hat für beide zunächst Vorrang.

Die Veränderungen des Erlebens und Verhaltens in der Pubertät sind nicht nur selbstbezogen. Anscheinend erst mit der Pubertät entwickeln Jungen einen schließlich begehrlichen Blick für gewisse weibliche Vorzüge („Busen und Popo“) vor allem von jungen Mädchen und Frauen, die sie in den Jahren zuvor kaum beachtet hatten. Der wohl doch misogyne Philosoph Arthur

Schopenhauer ging in Bezug auf das andere Geschlecht so weit, das Weib als „Knalleffekt der Natur“ zu bezeichnen, so als könnten nur die knackigen 16- bis 26-jährigen Mädchen und jungen Frauen für einen Mann begehrenswert sein. Dabei hätte er wissen können, dass schöne Frauen über viele weitere Jahre und Jahrzehnte attraktiv bleiben können.

Zwischen männlichern und weiblichen Jugendlichen können sich intensivere Liebesbeziehungen entwickeln, die oft schon auf eine länger dauernde Partnerschaft angelegt sind und auch nach außen hin demonstriert werden, im „Miteinandergehen“, auch Hand in Hand oder eingehakt, im liebevollen Sichanschmiegen, Umarmen, „Ansichdrücken“ „Knuddeln“, „Kuscheln“, „Knutschen“, insgesamt in der Suche nach Nähe und zärtlich-enger Berührung. Das kindliche Nuckeln an der Mutterbrust, am Gummisauger und am eigenen Daumen findet dann eine Wiederkehr und zugleich Abwandlung im Küssen der ineinander Verliebten, im gegenseitigen Züngeln und zarten Saugen, im liebevollen Spiel von Zungen und Lippen. Das kann begleitet sein von Zärtlichkeiten der Hände, die an dem (der) Geliebten immer neue Stellen entdecken, die gestreichelt werden können und sich sogar selber dazu anbieten, angefangen mit dem lieben Gesicht, mit dem Kraulen in den Haaren, mit dem Streicheln der Hände und Arme und Knie und so weiter, und weiter auch bis zu den Brüsten der Frau mit ihren zarten Nuckelchen, bis zu den Pobacken und zu anderen wohlgerundeten Formen und, wenn beide Partner sich ihrer nur hinderlichen Kleidung entledigt haben und schließlich völlig nackt sind, beim Mann noch weiter bis zu seinem gar nicht mehr so kleinen Pimmel, der sich der streichelnden Hand schon begehrlich entgegenstreckt, und bei der Frau bis zu ihrem Nibbelchen, das von den sich öffnenden Schamlippen gar nicht mehr versteckt gehalten wird, weil es vielleicht auch ganz gern, sanft und zärtlich, gestreichelt werden möchte.

Wenn die inzwischen nackten Liebenden miteinander spielerisch immer Neues entdeckt haben, eben in einem liebevoll-lustvollen „Vorspiel“, sind sie zu Weiterem eingestimmt, das sie dann kaum noch abwarten können, vor allem fast unabweisbar dazu, dass sich in der innigen Umarmung der beiden Nackten das schon vertraute Züngeln und Lutschen des Kusses ganz unmittelbar überzeugend auf andere Organe und nach unten verlagert, wo das steif gewordene Glied des Mannes, von den schon feucht-warmen Schamlippen der Frau empfangen, schließlich so perfekt in ihre Scheide (Vagīna) hineinpasst und die Liebenden auf diese Weise das vorherige Küssen auf andere und noch sinnlichere Weise und noch intensiver fortsetzen können und dann auch unbedingt wollen. Denn das steife Glied des Mannes und die feucht-warme Scheide der Frau sind in ihrem so perfekten Zusammenpassen, gleichsam wie der Nippel in seiner Nut, wie geschaffen dafür, die von Liebe erfüllten und von Lust erregten Körper zweier Menschen ganz eng und tief, und immer stärker, und möglichst lange, und immer wieder und vielleicht auf Dauer miteinander zu verbinden.

--- An dieser Stelle, wo es gerade so spannend ist, nur ganz kurz eine Zwischenbemerkung: Für die in der eben unterbrochenen Schilderung verwendeten u. a. auch medizinisch-korrekten Bezeichnungen der männlichen und weiblichen „Geschlechtsorgane“ können die einander Liebenden auch zärtlichere oder sinnlichere Kosenamen finden, besonders auch für das grässliche Wort „Geschlechtsverkehr“ oder das flapsige „Liebe machen“. Nach Ernest Bornemann (Sex im Volksmund. Der obszöne Wortschatz der Deutschen. Rororo, Reinbek, 1971, Abschnitt 26.25) gibt es dafür über 400 Tätigkeitswörter und dazu noch viele weitere zusammengesetzte Ausdrücke, viele davon sind allerdings ziemlich grob. Besser wäre es deshalb, zärtlich-liebevolle und sinnliche Wörter selber zu erfinden, möglichst solche, von denen das geliebte Wesen ebenso positiv angesprochen wird wie man selbst. Ein Beispiel: Statt des medizinischen Begriffs „Klitoris“ (war das eigentlich der Name einer gestrengen altgriechischen Göttin der Unterwelt?) oder des gleichbedeutenden „Kitzler“ (ist das die

Berufsbezeichnung für einen mittelalterlichen Folterknecht?) könnte jemand dieses versteckte, recht zierliche und doch so stark und sinnlich empfindende Wesen auch ganz zärtlich „Nibbelchen“ nennen und es entsprechend zart und liebevoll behandeln, bis es dem erst sachte und dann drängender anklopfenden Herzensfreund liebend gern die Tür öffnet und ihn voller Glück empfängt. Ähnliche Wendungen wie in diesem letzten Satz kann man übrigens auch in den Liebesgedichten („Amores“) des Ovid finden (ins Deutsche übertragen von Heinrich Naumann, unter dem Titel “Ovid“ veröffentlicht im W. Goldmann Verlag, München, 1966). ---

Die schon bis dahin so intime sexuelle Begegnung findet also ihren eigentlichen Fortgang mit einem zunächst zungenartig suchenden und schließlich doch entschiedenen Eindringen und Hineingleiten des steifen Gliedes in die angenehm glitschig-anschmiegsame Scheide, die das Glied warm und wohlig umschließt. Und dann geht es gleich weiter mit dem Hin und Her der nach kurzem Ausholen immer wieder tief eindringenden Bewegungen des steifen Glieds, nach Herzenslust beantwortet von zärtlichen bis intensiven Gegenbewegungen der Frau. Beide Partner können dabei mal sich selber rhythmisch bewegen, aber auch mal innehalten und dabei die Bewegungen des Anderen spüren und genießen, einander abwechselnd wie in einem Frage-und-Antwort-Spiel, in dem sie lernen können, mit Glied und Scheide einen höchst sinnlichen Dialog zu führen. Beide Partner wollen dann, dass dies sich so oft und so lange wie möglich wiederholt, außer in kurzen Pausen, die der Mann bewusst einschalten kann, damit das gute Gefühl und die schon aufgekommene Lust nicht zu schnell endet, und vielleicht auch bewusst variiert mit verschiedenen Tempi und Rhythmen, die zu immer neuem Genuss beitragen sollen. Dieses Wechselspiel kann schließlich übergehen in eine nunmehr imperative Gleichzeitigkeit der Bewegungen, wenn die Frau den Liebesstößen des Mannes immer aktiver entgegenkommt und damit beide Partner zur weiteren Steigerung der sexuellen Erregung beitragen. Dies wird dann in schließlich schneller Folge und immer intensiver fortgesetzt bis zu einem bestenfalls von beiden Liebenden gleichzeitig erlebten Höhepunkt der sexuellen Wollust (der Wohl-Lust), bis zum Orgasmus, diesem bei den meisten Menschen dieser Welt unbestritten höchsten der Gefühle. Noch erlösender als in der Zeit, in der sich die Pubertierenden selbst befriedigten, geschehen dann im Orgasmus dem Mann das Ausspritzen (die Ejakulation) der Samenflüssigkeit und der Frau die „schluckenden“ Bewegungen (Kontraktionen) der Scheide und der Gebärmutter, so als würden die beiden Partner dieses Ausspritzen und Schlucken voller Lust als Einunddasselbe gemeinsam verspüren. Dabei erhöht sich bei beiden die Pulsfrequenz, verbunden mit stärkerer Durchblutung und tieferem Durchatmen, was aber nur den Physiologen interessiert, denn die beiden Liebenden registrieren dies alles nicht im Einzelnen, sondern sind von dem, was sie insgesamt als Selbstentgrenzung, als „ozeanisches Gefühl“ (S. Freud) erleben, völlig hingerissen. Erst im Höhepunkt des gemeinsamen Orgasmus sind Mann und Frau richtig „ein Leib und eine Seele“. Danach kommt dann ein Gefühl der vollen Befriedigung und tiefen Entspannung auf, in der Zweisamkeit verbunden mit einem nachhaltigen Glücksgefühl, wenn die beiden Liebenden selig miteinander ruhen, jedenfalls seliger als im „Jenseits“. Bis dann eine wohlige Müdigkeit aufkommt und die beiden nur noch ein paar liebe Worte flüstern, um dann gemeinsam sanft einzuschlummern und nach einem erholsam tiefen Schlaf wieder aufzuwachen. So wie eben geschildert könnte es sein.

Aber dafür kann man keine Regeln, und schon gar keine Gebote aufstellen. Denn es könnte auch anders als von mir beschrieben verlaufen, etwa wenn eine Frau das lieblos-mechanische Rammeln ihres Mannes nur noch als Störung ihrer Nachtruhe oder als körperliche Belästigung empfindet. Dann können Sexualpartner zur gleichen Zeit sehr unterschiedliche Gefühle haben: Der eine genießt seine momentane Befriedigung, die andere spürt ihre zunehmende Unlust und Abwehr. Aber das sollte doch eher eine Ausnahme sein. Und es gibt

Männer, denen es nicht genügt, insgeheim stolz auf ihre so sichtbare Potenz zu sein, oder, was besser wäre, mit ihr liebevoll und zugleich sozial verträglich den Wünschen ihrer Partnerin entgegenzukommen; sie versuchen stattdessen, etwa in einem Park, exhibitionistisch kleine Mädchen zu erschrecken und auf diese Weise ihre eigene Unsicherheit größengierig zu kompensieren. Erfahrene Frauen lassen sich damit nicht in die Flucht jagen, aber sie machen eher keinen Gebrauch von einem derartigen sexuellen Angebot, und wenn sie es tun würden, könnte der Exhibitionist vielleicht die Flucht ergreifen. Manches Andere, was etwa als Aufklärung über Sexualität angepriesen wird, wie die verschiedenartigsten Positionen (Stellungen, Lagen, Haltungen) beim Geschlechtsverkehr, hat eher mit Akrobatik zu tun, ist mehr für irgendwelche Voyeure als für die selber Liebenden attraktiv. Aber im Grunde ähnlich wie andere Antriebe „zivilisiert" werden können, nämlich die blinde Angst sublimiert zur gebührenden Vorsicht und vorausplanenden Vorsorge, die wütende Aggressivität gezähmt zu regelgeleiteten Kampfspielen und zum Sport, der gierige Hunger klug umgesetzt zur Kochkunst und zum kundigen Genießen einer Speisenfolge durch den Gourmet, so kann auch die Sexualität kultiviert, zum Spiel erweitert, zum Tanzen gebracht, zum Schönen gestaltet und eben auch in Liebe eingebunden werden, in eine Liebe, die auf Dauer angelegt ist, auch auf den gemeinsamen Wunsch, ein Kind und noch mehr als dieses eine zu zeugen und zu empfangen, es auszutragen, zu gebären und, in der eigenen Familie geborgen, gemeinsam aufzuziehen.

Vom Schwangerwerden und dann Schwangersein der Frau war bislang noch nicht die Rede, obwohl auch die Schwangerschaft als ein ggf. wiederholbarer biologischer Vorgang zu verstehen ist, der in diesem Fall einen wie beschrieben lustvollen Anfang haben kann und nach neun Monaten hoffentlich ein gutes Ende mit der Geburt eines gesunden Kindes. Nicht nur das Zeugen und Empfangen eines Kindes sollte als Glücksmoment in Erinnerung bleiben, sondern auch das Kinderhaben sollte allen Beteiligten viel Freude bereiten und oft auch richtig Spaß machen, von Anfang an und immer wieder. Schon vor der Geburt des ersten Kindes wird eine nicht nur sexuelle Dauerhaftigkeit der Partnerbindung relevant, die gegen Überforderung geschützt werden sollte durch die Möglichkeit und auch Notwendigkeit der zwischenzeitlichen Empfängnisverhütung.

Gemeinsam mit Lust und Liebe gezeugte und empfangene und dann gesund geborene Kinder sollten nicht nur in materieller Sicherheit aufwachsen, sondern sich auch in mütterlich-väterlicher Geborgenheit entwickeln können. Das braucht ein Kind von Anfang an, und wenigstens bis zu seinem Selbständig- und Erwachsenwerden. Auch dafür gibt es biologische Zeitgeber, insbesondere bei der Mutter gewordenen Frau, in immer noch ähnlicher Weise wie bei unseren tierlichen Verwandten. Die Autoren C. H. Kinsley und Kelly G. Lambert sind in ihrem Beitrag „Warum Mütter klüger sind" (Spektrum der Wissenschaft. Nov. 2006, S. 46 – 53) dieser Frage nachgegangen. Ausgangspunkt ihrer Abhandlung sind die vielfach bestätigten Befunde, dass sich das Gehirn weiblicher Säugetiere auf eine Mutterschaft einrichtet: „Es gewinnt an Kompetenzen – zum Wohl des Nachwuchses" (S. 46). Dies geschieht schon vorbereitend vor der Geburt der Jungtiere, vor allem aber anschließend bei der Brutpflege, wo das Muttertier mehr Geschick, mehr Orientierungssinn und auch mehr Mut entwickelt, was alles letztlich dem Nachwuchs zugute kommt. Nach dem Gebären wird die Tiermutter nicht mehr nur durch die Hormone, sondern allein schon durch die Jungen genügend stimuliert, sie gut zu betreuen. Möglicherweise der Autor (Kinsley) schreibt in der Sicht eines Mannes: „Obwohl so ein Neugeborenes wirklich lästig, anspruchsvoll und in vieler Hinsicht nicht gerade angenehm ist, weil es rundum versorgt werden muss, mitunter stinkt und nur mit Unterbrechungen schläft, übertrifft bei Tieren kein anderes Verhalten an Hingabe das einer Mutter. Sogar Sexualtriebe und Fressen verblassen dagegen... (Und) wieso kümmern sich einfache Säugetier(mütter) derart intensiv um ihren Nachwuchs (?) Er fühlt sich einfach gut an“ (S. 48). Einige Forscher spekulieren, dass mütterliches Verhalten für die Evolution des Säugergehirns, offenbar bis zu dem des Menschen, einer der entscheidenden Faktoren, jedenfalls eine wichtige treibende Kraft gewesen sei (S. 46).

Bei Menschenmüttern sind die Verhältnisse immer noch sehr ähnlich. Dafür gibt es viele Hinweise. Mütter erkennen Gerüche und Lautäußerungen ihrer eigenen Kinder erstaunlich gut. Wenn Mütter nach der Geburt viel von dem Stresshormon Cortisol bildeten, waren sie dadurch mehr als andere Frauen motiviert, sich ihrem Kind intensiv zu widmen und konnten das Weinen ihres eigenen Kindes besser heraushören. Ein erhöhter Cortisolspiegel fördert und stärkt die Beziehung zu ihrem Kind und lässt die Mutter wacher, aufmerksamer und empfindsamer für ihr Kind werden. Das Gehirn scheint durch die Mutterschaft zu gewinnen: „Wenn es hoch hergeht, läuft es eben zur Hochform auf“ (S. 53). Mütter müssen mit „verteilter Aufmerksamkeit“ ohnehin Vieles und Verschiedenes gleichzeitig tun können, statt wie manche Männer ihre enge Konzentration nur auf eines zu richten, das ihnen dann als das einzig Wichtige erscheint. Aber es gibt auch fürsorgliche Väter, schon bei bestimmten Tierarten, wo sich beide Eltern um die Jungen kümmern. Dann zeigten sich Mütter wie Väter von Jungtieren einer Lernaufgabe (z. B. den Weg durch ein Labyrinth zu finden) besser gewachsen und trauten sich mehr, fremde Objekte zu untersuchen, als Tiere beider Geschlechter ohne Junge. Wie es aussieht, meinen die Autoren, fördert nicht nur die Schwangerschaft, sondern auch der bloße Umgang mit dem Nachwuchs einige Verhaltensleistungen, und das betrifft naturgemäß besonders das weibliche Geschlecht. Aber ich denke, dass sich das auch auf Väter auswirken kann, die dadurch auch noch etwas intelligenter werden, insbesondere an sozialer Intelligenz gewinnen könnten!

Die Familienmitglieder (Eltern und ihre „Kinder“, die inzwischen erwachsen gewordenen Töchter und Söhne, aber auch noch weitere Angehörige und Freunde) können oft noch weit darüber hinaus freundschaftlich und solidarisch miteinander verbunden bleiben, die Eltern offenbar auch bis ins hohe Alter und dann ggf. auch ohne im engeren Sinne sexuelle Motivation. Denn dass die Liebe weit über das genital-sexuelle Miteinander im Bett hinausreicht, das können insbesondere ältere Menschen erfahren, deren sexuelle Aktivität und Attraktivität schwindet und irgendwann ein Ende finden wird. Dann könnte es sein, dass ein schon alt gewordener Mann irgendwann auch bei stärkerem Anreiz nicht mehr in diese bestimmte Stimmung kommt, deren Anzeiger bisher das steif aufgerichtete Glied war. Aber für Zärtlichkeiten und andere Arten liebevoller Zuwendung gibt es dann immer noch gute Möglichkeiten und Gelegenheiten!

Ich brauche wohl nicht zu betonen, dass in diesem Kapitel (einzelne Passagen ausgenommen) nicht zentral von Liebe die Rede war, sondern eher von der eigenen Sehnsucht nach Zweisamkeit, nämlich jemanden ganz für sich allein haben zu wollen, vom eigenen Hunger nach Zärtlichkeiten und von der eigenen Lust auf sexuelle Befriedigung. Im Unterschied dazu hat **Liebe** mehr mit dem Wunsch eines Menschen zu tun, solchen Hunger eines **anderen** Menschen gern zu stillen, so wie die Mutter ihrem Säugling ihre eigene Brust zum Trinken anbietet, auch wenn es ihr anfangs Schmerzen bereiten sollte. Oder später könnte jemand darauf aus sein, dem geliebten Anderen zuliebe dessen (deren) Lust und Befriedigung gern herbeiführen zu wollen. Die Liebe selbst hat keine intensive Rhythmik, sondern eine verlässliche Dauer und besteht vor allem in einer nachhaltig positiven Präsenz. Wer jemandem von Herzen zugetan ist, hat das aktuelle Wohl des geliebten Wesens im Sinn und auch sein zukünftiges Wohlergehen, und unterstützt es bei der Entwicklung seiner eigenen Möglichkeiten. Als ein wirklich Liebender ist ein Mann eher darauf aus, die von ihm geliebte Frau gut zu verstehen und ihre Wünsche zu erspüren, als nur im Eigeninteresse mit ihr etwas zu machen, was sie vielleicht im Moment gar nicht will. Die Redensart „für jemanden etwas übrig haben“, macht erst richtig Sinn, wenn man sie ernst nimmt und dieses „Etwas“ keine belanglose Kleinigkeit, sondern Liebe ist. Auch das inzwischen selten ausgesprochene Wort „innig“ passt eher zur Liebe als zur sexuellen Lust, was aber nicht ausschließt, dass das eine mit dem anderen zusammenklingt und die innig Liebenden „mit Lust und Liebe“ einander Gutes tun. So ist die Liebe zuallererst eine schenkende Tugend, wie es ein Mystiker (vielleicht Meister Eckhart) einmal gesagt hatte: „...und wenn ich dich liebe, was geht es dich an!“. Liebe ist eben primär kein Geschäft auf Gegenseitigkeit, obwohl sie durch Gegenliebe noch vertieft werden kann. Und wenn sie sexuelle Lust schenkt, kann das Beiden sehr gut tun.

Bitte verzeihen Sie mir diesen etwas zu ausführlich geratenen und zwischendurch vielleicht doch als schlüpfrig erscheinenden Exkurs. Ich habe mich schon deshalb zu ihm entschlossen, weil ich ganz allgemein davon überzeugt bin, dass eine Philosophie, die das Thema „Sexualität“ umgeht oder bis zur Unerkennbarkeit abstrahiert, so etwas ist wie ein Braten ohne Salz und Pfeffer, wo doch wenige Körner davon und noch etwas Knoblauch genügen, um ihn schmackhaft und bekömmlich zu machen. Dagegen könnte gefragt werden, ob Sexualität und Philosophie, außer als Bereiche menschlicher Erfahrung, doch noch enger etwas miteinander zu tun haben. Ich meine, ja, denn der in beiden Kontexten verwendete Begriff „**Aufklärung**“ zeigt einen Zusammenhang auf, der es verdient, hervorgehoben zu werden. Es ist nämlich kein Zufall, dass eine unzensierte **sexuelle** Aufklärung erst möglich wurde, nachdem die **philosophische** Aufklärung unter anderem auch die weitgehende Aufhebung christlicher Sexualtabus ermöglicht hatte. Die alttestamentliche jüdische Sexualethik diente ja mit dem Gebot „Du sollst nicht ehebrechen!“ noch zentral dem Schutz der Ehe und Familie. Dies wurde aber paulinisch-christlich ins Absurde verallgemeinert und schließlich verteufelt bis zum Generalverdacht gegen alles Sinnliche oder auch nur Erfreuliche am sexuellen Lustgewinn welcher Art auch immer, sogar der ehelichen Bettfreuden, die ersetzt werden mussten durch das „Erfüllen ehelicher Pflichten“, was wiederum allein die Verbreitung des Glaubens („propaganda fide“) mittels Kinderkriegen bezwecken sollte. Eine gegen solche Einengungen und Verirrungen gerichtete philosophische und im Einzelnen auch sexuelle Aufklärung ist offenbar auch noch in unserer Zeit nötig, und die hier von mir vorgetragenen Informationen sollten als Beitrag zu beidem verstanden werden.

Vielleicht habe ich diesen Exkurs auch aus einem persönlichen Motiv verfasst, nämlich um einer längst als erledigt vermeinten Negativerfahrung aus der Zeit meiner Pubertät nun doch noch, im inzwischen sehr fortgeschrittenen Alter, etwas Positives entgegenzusetzen. Mir selber hat vor und während meiner Pubertät ein angemessene sexuelle Aufklärung nicht nur gefehlt, sondern ich hatte mich stattdessen mit den damals noch üblichen Warnungen vor der Selbstbefriedigung („Selbstbefleckung“) und den damit verbundenen Drohungen vor ihren schlimmen Folgen („Rückenmarksschwindsucht“ und „Verblödung“!) auseinanderzusetzen.. Das war damals eine wirklich „blöde“ Art der Fehlaufklärung, und sie war auch alles andere als hilfreich für einen Orientierung suchenden Jugendlichen. So etwas ist inzwischen, den Gottheiten des Sexus und der Liebe sei Dank, in zivilisierten Gesellschaften und aufgeklärten Familien nur noch ein Schatten der Vergangenheit. Heute dürfen auch Kinder von diesen Dingen wissen oder sich, spätestens in der Pubertät, durch geeigneten Lesestoff selber informieren. Und sie sollten verstehen lernen, dass Menschen, lange vor dem Zählen von Null bis Unendlich, seit jeher als Sexualpartner die Aufeinanderfolge und Wiederkehr des (fast) Gleichen kennen und in verschiedener Weise sogar als höchst befriedigend erleben können, um dann auch das jeweilige Ende dieser Aufeinanderfolge des Guten leichter akzeptieren zu können. Auch dies kann man aus der Sexualität lernen: manche Wiederholungen kann man nicht beliebig und schon gar nicht bis in alle Ewigkeit fortsetzen. Dennoch kann auch eine begrenzte Dauer, mit vielen Wiederholungen von ihrem Anfang bis zu ihrem Ende, ihr Gutes haben. Eine Dauer **zwischen** Anfang und Ende! Sie kann ja bald auf lustvollste Weise erneut erlebt werden!

Aber es gibt Menschen, die sich mit den zwischendurch und immer wieder als gut erlebten Zeitabläufen nicht zufrieden geben können und stattdessen für sich eine unendbare Dauer der Glückseligkeit erhoffen. Aber wie heißt es im Plattdeutschen? „Da luur man drup!“ Das heißt: Darauf kannst du lange warten, eine ganze Ewigkeit lang! Und man kann viel kleines Glück versäumen, wenn man allzu lange nur auf das ganz große Glück gestarrt und weiter darauf gewartet hatte. Bis zum gar nicht so glücklichen Ende. Einige positive Alternativen dazu habe ich hoffentlich klar machen können.

In einem letzten Hinweis will ich noch auf die tradierten Symbole für männlich (♂) und weiblich (♀) eingehen. Das Zeichen für „männlich“ ist zugleich das Zeichen für den Planeten Mars, abgeleitet vom Bild des kriegerischen Gottes Mars mit seiner Lanze. Es könnte aber mit dem Pfeil des Amor auch als wenig verhülltes Symbol für den erigierten Phallus gelten, und damit in wohl passender Weise die männliche Tendenz zur unendbaren Wiederholung eines hochbefriedigenden Tuns wiedergeben. Aber was soll das sperrige Folterkreuz, das so schwer vom Kreis des Symbols für „weiblich“ herunterhängt? Es ist, kaum noch wieder zu erkennen, eigentlich der Griff des Spiegels der so weiblichen Göttin Venus, der Göttin der Liebe, die mit dem in Richtung zur Sonne nächsten Planeten, der als Morgen- bzw. Abendstern den Menschen immer schon vertraut war, ihren Namen teilt. Wie wär’s, wenn statt der drei sperrig nach außen gerichteten Zacken dieses Kreuzes lieber zwei weiche Bögen sich nach innen fortsetzten und einen weiblichen Innenwinkel bildeten, der in seiner Grundform dennoch dem Außenwinkel des so männlichen Pfeils entspräche? Das würde dann so aussehen: . Ich überlasse es der Phantasie des Lesers und der Leserin, ggf. gemeinschaftlich herauszufinden, wie sich diese beiden Symbole wenigstens zeitweise zu einem Ganzen zusammenfügen lassen.

Erst an dieser Stelle meiner Ausarbeitung merke ich, zu meiner eigenen Überraschung, dass sich diese Sexualsymbole (♂ und ) in einer vielleicht ganz gut begründbaren Weise auf die beiden am Anfang dieses Kapitels eingeführten „Unendlichkeits“-Symbole beziehen lassen, wenn man nämlich die Unendbarkeit () mit ihrer eher männlichen Tendenz polar gegenüberstellt einer Allendlichkeit (), die als ein weiblich Einschließendes gesehen werden kann. Erst beides zusammen würde das Ganze ausmachen, das dann sowohl religiös als auch philosophisch verstanden werden könnte, wenigstens vorübergehend, denn sowohl der zweifelnd suchenden Philosophie als auch der auf Glauben bauenden Religion würde es nicht gut bekommen, auf Dauer oder sogar ewig zu einem Dazwischen oder Darüberhinaus, etwa gar zur Theologie, zwangsvereinigt zu werden! Dennoch bleibt festzuhalten: über solche Vergleichbarkeiten schließen sich verschiedene von mir vertretene Theorien zu einer Gesamtsicht zusammen, nämlich zu einem hier recht deutlich dualen Aspekt einer darüber hinaus pluri-relationalen Philosophie, die etwas anderes und zugleich mehr ist als eine bloße Weltanschauung.

**Ende**